MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DIRECCIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR

INSTITUTO SUPERIOR INTEGRAL DEL ÉXITO

INSTITUTO SUPERIOR INTEGRAL DEL ÉXITO

"Donde se Enseña y se Educa"

TÉCNICO SUPERIOR EN SISTEMAS INFORMÁTICOS

MÓDULO DE AUTOAPRENDIZAJE

ASIGNATURA:

Matemática General

FACILITADOR (A):

PROF._____

ESTUDIANTE:

PRESENTACION

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Hoy en día ninguno puede pensar que la obtención de un diploma o un título le asegura un sitio en la comunidad del conocimiento. En lo siguiente, todos los seres humanos tendremos que persistir en nuestra formación o capacitación a lo extenso de la vida.

Esta exigencia ha obligado a dar un nuevo enfoque al proceso educativo y poner la importancia en el desarrollo de las cualidades y habilidades del estudiante para que aprenda a aprender, aprenda a hacer, aprenda a estar y, sobre todo, aprenda a ser.

Tal vez el menos culpable de esta situación es el propio estudiante si consideramos la improvisación, en los contenidos y en la metodología de la enseñanza de la matemática, a la que se ve sometido a lo largo de sus estudios realizados en el bachillerato. Para tratar de igualar a estos jóvenes, tan complejos en sus conocimientos, se hace necesario incluir el curso electivo de matemáticas básicas como un puente entre los conocimientos adquiridos en la educación media y el inicio de la educación superior.

El saber de estos problemas en la Universidad me ha alentado a escribir este módulo, cuyas cualidades fundamentales son las siguientes:

1. El empleo de un lenguaje fácil y cómodo para el lector.

2. Trabajos fácilmente realizables que conllevan a la asimilación del concepto matemático deseado.

3. El desarrollo de las diferentes temáticas incluye diversos ejemplos, con el fin de ahondar adecuadamente y pensar en sus diversas aplicaciones.

4. Habrá· gran cantidad de ejercicios debidamente escogidos que buscan motivar al estudiante a obtener con su propio desarrollo una adecuada

PROPOSITOS:

Dentro de los propósitos del curso se tiene que el estudiante identifique los principios de las Matemáticas Básicas, para que los aprendientes de los diferentes programas académicos que oferta del Instituto Integral, activen y fortalezcan sus conocimientos previos. Otra intencionalidad importante es que los estudiantes clasifiquen las diferentes operaciones matemáticas, teorías, axiomas, definiciones y propiedades, con el fin de que puedan comprenderlas
y emplearlas cuando así se requieran.

Por último, todo lo anterior nos conlleva a que el estudiante sea un factor determinante en la solución de problemas en el campo de la ciencia, tecnología e ingeniería, con los conocimientos debidamente adquiridos del curso académico.

OBJETIVOS:

Los objetivos del curso se pueden dividir en dos:

Generales:

a) Proporcionar y reforzar al estudiante los conocimientos básicos mínimos en matemáticas, que debe poseer un estudiante de nivel superior.
b) Desarrollar en el estudiante un sentido matemático que le permita enfrentar con seguridad y criterio situaciones que exijan matemática.
c) Capacitar al estudiante para que logre destreza en la manipulación de la Aritmética y algebra.
d) Plantear, resolver e interpretar situaciones donde se tenga que aplicar la matemática básica.

Específicos:

a) Que los estudiantes conozcan, describan y manejen claramente los conceptos, clases, operaciones y propiedades de los conjuntos numéricos, números, potenciación, radicación, logaritmación, a través del estudio teórico y el análisis de casos modelos.
b) Identificar y desarrollar las expresiones algebraicas, polinomios, Factorización, productos y cocientes notables, M.C.D y M.C.M.
c) Desarrollar habilidades para operar y simplificar expresiones racionales.

CAPITULO 1
ARITMETICA

INTRODUCCION:

Siempre que emprendemos una empresa que requiere nuestra mejor atención y empero, como el estudio del presente modulo, es conveniente revisar las bases y recorrer rápidamente el camino avanzado. Por eso este primer capítulo incluye un somero repaso de la teoría básica de conjuntos y números; lo que nos dar·, además de conocimientos renovados de lo estudiado en la infancia, un mismo idioma para establecer una verdadera comunicación con el estudiante.

AUTOEVALUACION INICIAL

Con el fin de hacer un diagnóstico sobre el conocimiento que usted tiene sobre las temáticas relacionadas con la aritmética, a continuación, lo invitamos para que resuelva la siguiente evaluación. Con este ejercicio, se pretende que usted haga una reflexión sobre lo que conoce acerca de esta temática y lo que quisiera aprender.

En caso que sienta que no puede contestar esta evaluación, no se preocupe que al abordar la temática encontrar· respuesta a todas sus inquietudes. Por eso es importante que al terminar el capítulo vuelva a resolver esta evaluación y nuevamente haga una reflexión sobre lo que aprendí.

1. **Sean los conjuntos:**

A. = {x / x es un número entero entre 5 y 10}

B. = {x / x es un número entero entre 4 y 8}

Hallar: $A \cup B$, $A \cap B$

2. Defina con sus propias palabras: números naturales, números enteros, números racionales y números reales. De un ejemplo de cada uno de estos tipos de números.

Hallar el resultado de:

3. $\frac{9}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2}$

4. $\frac{5}{3} - \frac{7}{9} + 4$

5. $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$

6. $\frac{6}{5} \div \frac{4}{9}$

7. Calcular los $\frac{3}{8}$ de 16.000

Hallar:

8. $5^2 \times 5^7 \times 5^3 \times 5$

9. $7^8 \div 7^3$

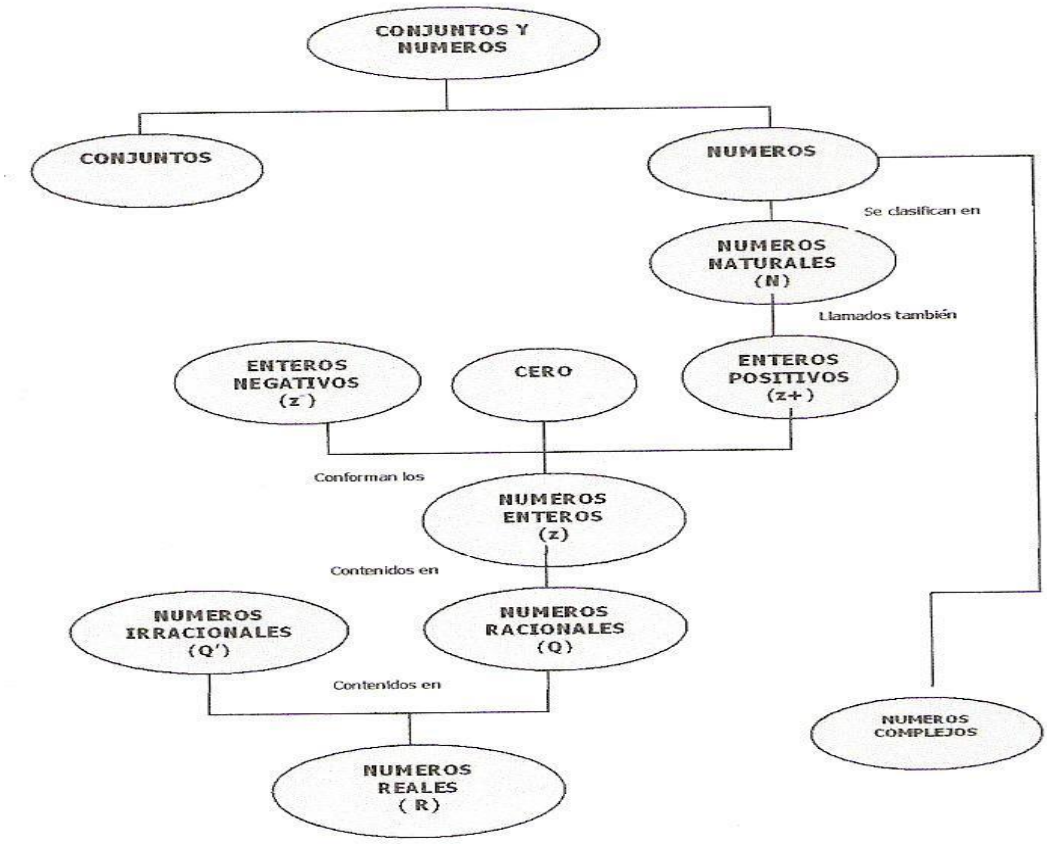
10. $\left(\left((9)^2\right)^3\right)^0$

11. 2^{-6}

12. $\sqrt[3]{1331}$

13. $\text{Long}_5 625$

1. CONJUNTOS Y NUMEROS:



Para abordar las temáticas de aritmética, ·algebra y geometría, es necesario tener muy claros los conceptos básicos sobre las diferentes operaciones que se pueden realizar con los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales.

1.1 CONJUNTOS:

Los conjuntos se pueden comparar como una colección, Reunión Û lista de objetos que comparten una cierta característica que los diferencia de otros. Están conformados por un grupo de objetos llamados elementos.

Se pueden enumerar de dos formas:

- Por **extensión** cuando se detallan todos los integrantes, por ejemplo, el conjunto de vocales del alfabeto castellano:

N = { a, e, i, o, u}

Esto significa que el conjunto **N** este· compuesto por los elementos a, e, i, o, u exclusivamente. En este caso se puede decir que el elemento **a** pertenece al conjunto N; Û diciéndolo matemáticamente: $a \in N$

Entonces el símbolo $\in$ **significa pertenencia.**

Análogamente se podría decir que: $h \notin N$, o sea que el elemento h no Pertenece al conjunto Nî.

El símbolo $\notin$ **indica no pertenencia.**

- Por **comprensión** es otra forma de enumerar los conjuntos, donde se diferencia un conjunto de otro por la característica ˙nica que agrupa sus elementos. En este caso la característica sería:

N = {x / x es una vocal del alfabeto castellano}

Se lee: N es el conjunto de los elementos equis tales que (o que cumplen la condición que) equis es una vocal del alfabeto castellano.

Cuando un conjunto tiene un número infinito de elementos (se llama conjunto infinito) no se pueden contar, es imposible describirlo por extensión, razón por la cual se hace necesario hacerlo por comprensión, por ejemplo, el conjunto de los números racionales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Supongamos el conjunto que describo por comprensión es:

P = {x / x es un número impar menor que 30}

Esto equivale al conjunto de elementos x que cumplen la condición de ser número impares menores que treinta.

Entonces para nombrar este conjunto por extensión sería:

P = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, 21,23,25,27,29}.

Se podría decir que 11 $\in$ P, pero 6 $\notin$ P

☺

Para nombrar los conjuntos siempre se usan las letras mayúsculas, en este caso **P,** mientras que los elementos se denotan con las letras minúsculas.

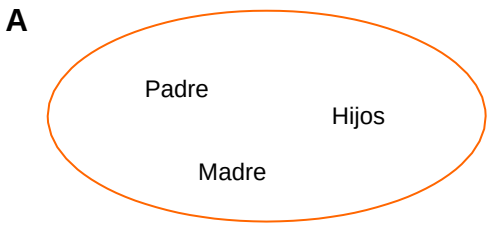
2. Si se tiene el conjunto M = {padre, madre, hijos}, por comprensión sería:

M =$\{$ x / x es un miembro de la familia $\}$

1.1.1. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

Ya se tiene conocimiento sobre como nombrar los conjuntos, ahora es importante recordar las diferentes operaciones que se pueden realizar con los conjuntos. Para facilitar este proceso, se acude los diagramas de Ven-Euler, mediante el cual se puede dar una idea más clara de los conjuntos.

El conjunto M anteriormente mencionado se puede representar en el diagrama de Ven-Euler de la siguiente manera:



Antes de iniciar con las diferentes operaciones que se realizan con los conjuntos, es importante recordar las **comparaciones** entre conjuntos:

- **Un conjunto es igual a otro** cuando tienen los mismos elementos, por ejemplo, los conjuntos:

A = {1, 3,5} y B = {5, 3,1},

Se dice que A =B, porque tienen los mismos elementos, sin importar el orden de los elementos.

Por otro lado, se puede decir que {1,3,5,3,1} = {1,3,5,5,3} por que tienen los mismos elementos, aunque se repitan algunos de sus elementos.

- **Contenencia:** Dados los conjuntos:

M = {a, b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,Ò,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z } y

N = {a, e, i, o, u}

Se aprecia que todos los elementos del conjunto **N** est·n también dentro del conjunto **M**, entonces se dice que **N** es un subconjunto de M o también que N está contenido en **M** y se denota como: $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$

En el caso de los conjuntos:

A = {1, 3, 5,}

B = {5, 3, 1}

Se puede decir que $A \subset B$, y $B \subset A$, entonces se llega a la conclusión que si dos conjuntos son iguales cada uno es subconjunto del otro.

- **Suma:**

La más sencilla de las operaciones entre conjuntos es la **adición o unión**, a través de la cual se obtiene un nuevo conjunto con los elementos de cada uno de los conjuntos que se están uniendo. Esta operación se representa con el operador $\cup$

Si se tienen los conjuntos:

A = {a, b, c, d, e, f, g}

B = {a, e, i, o, u}

La suma de estos dos conjuntos es:

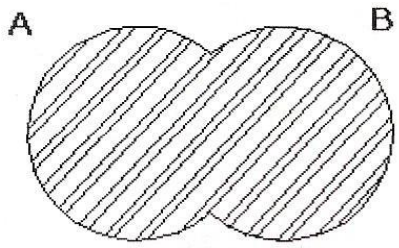
A∪ B = { a,b,c,d,e,f,g,i,o,u }

☺

En la adición o unión de conjuntos, el conjunto resultado es igual a los elementos comunes y no comunes

Los elementos comunes, en este caso a, e, solamente se colocan una vez.

A través del diagrama de Ven la suma se representa de la siguiente manera:



UNION
A ∪ B

- **Intersección:**

☺

La Intersección de dos o más conjuntos es el grupo de los elementos que son comunes a tales conjuntos

Esta operación se representa por el símbolo ∩

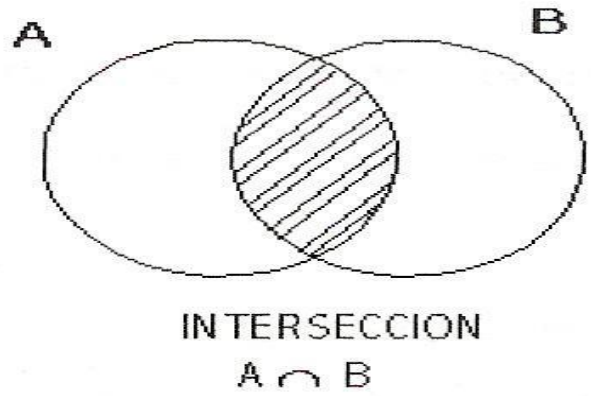
Siguiendo con el ejemplo anterior, A = {a, b, c, d, e, f, g} y

B = {a, e, i, o, u}, **intersección** igual a:

$A \cap B = \{a, e\}$

Porque los elementos **a, e** se encuentran en los dos conjuntos.

Mediante diagramas de Ven la operación de **intersección** se representan así:



Existe un conjunto llamado **Universal (U).** Este representa el total de elementos que pueden componer un conjunto.

Por ejemplo, si se tienen los conjuntos

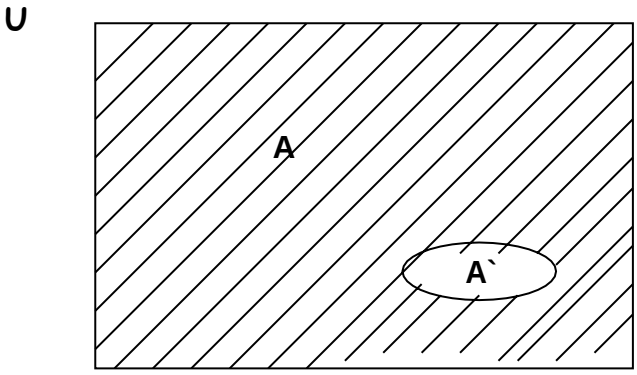
U = { a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,y,z } y

A **=** {a, e, i, o, u}

El **conjunto complemento de A** denominado **A¥** (A prima) equivale al conjunto de elementos que pertenecen al conjunto **Universal** y que no pertenecen al conjunto **A,** entonces:

A¥ = {b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z}

El conjunto Universal se representa por un rectángulo en el diagrama de Ven, dentro del cual están todos los subconjuntos:



Conjunto unitario: Cuando un conjunto tiene un solo elemento se llama conjunto **unitario.**

Conjunto vacío: Se refiere al conjunto que no contiene elementos y se representa mediante la letra griega ‘ , y por extensión se representa así:

{ }, sin elementos, por ejemplo, si:

M = { 1,3,5,7,9 } y N = { 2,4,6,8 } la intersección es:

M ∩ N = ‘ porque los dos conjuntos no tienen elementos comunes.

1.1.2. PROPIEDADES DE OPERACIONES CON CONJUNTOS:

- **CONMUTATIVIDAD:** La unión y la intersección de conjuntos cumple la ley **conmutativa**, esto es:
A ∪ B = B ∪ A; A ∩ B = B ∩ A

- **ASOCIATIVIDAD:** La unión y la intersección de conjuntos cumplen la ley **asociativa**, esto es:
(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C); (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

- **DISTRIBUTIVIDAD:** La intersección es **distributiva** con relación a la unión, y la unión es distributiva con relación a la intersección, esto es:
A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C);

A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

EJERCICIOS RESUELTOS

Sean los conjuntos:

U = { 1,2,3,4,5,6,7,8 }

A = {1, 2, 3, 4,5}

B = {1, 2,3}

C = {4, 6,8}

Hallar: (A ∪ B); (B ∪ C); (C ∪ A); (B ∩ C); (C ∩ A) ; B¥

(A ∪ B) = {1, 2, 3, 4,5}

(B ∪ C) = {1, 2, 3, 4, 6, 8}

(C ∪ A) = {1, 2, 3, 4, 5, 6,8}

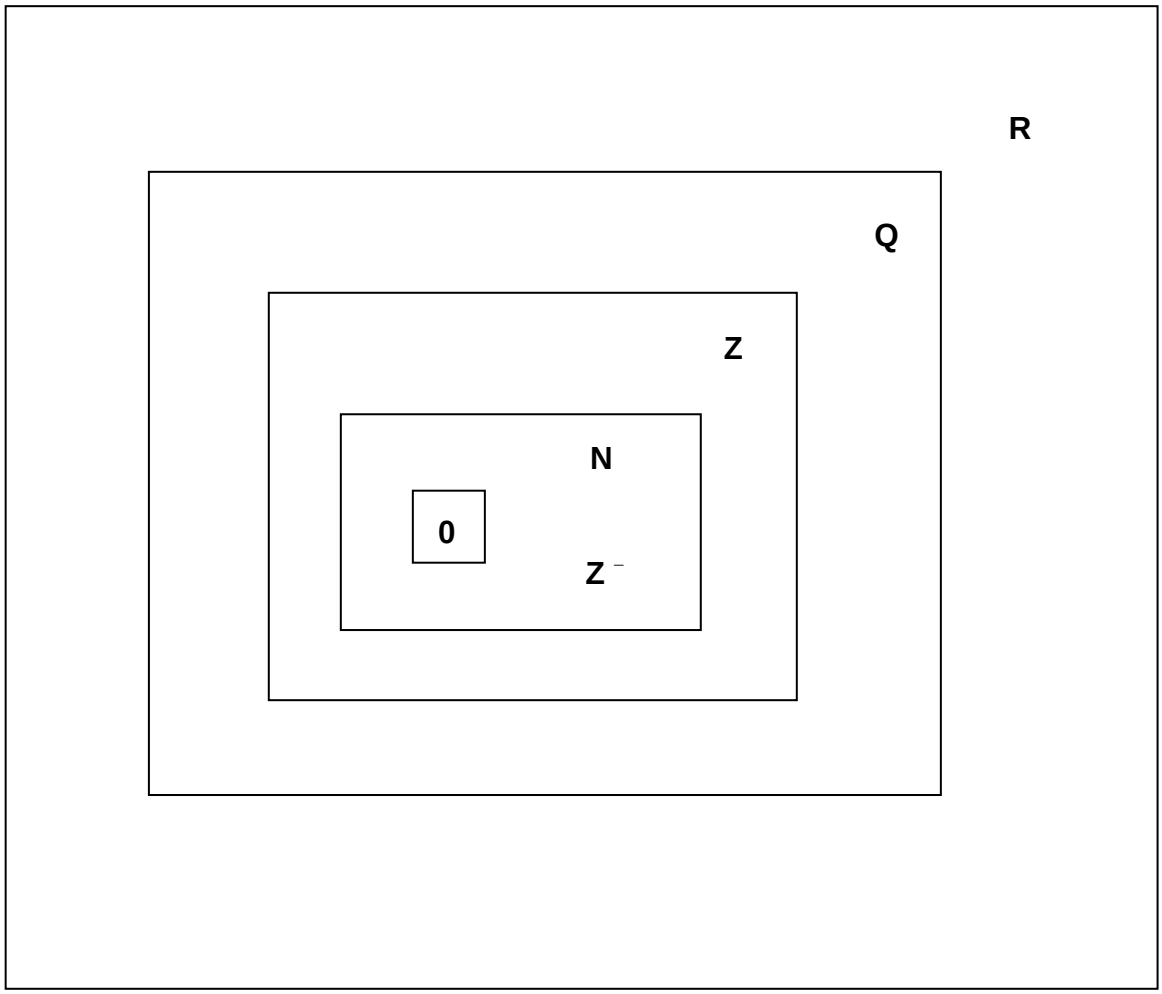
(B ∩ C) = O (CERO) porque no tienen elementos comunes
(C ∩ A) = {4}

B¥ = {4, 5, 6, 7,8} (o sea que B¥es igual a los elementos que están en U pero no estén en B).

1.2. NUMEROS:

Al considerarse los conjuntos como una colección de elementos con cierta característica que lo diferencian de los demás, los diferentes grupos numéricos:

Reales, Racionales, Enteros y Naturales son catalogados como conjuntos, de tal manera que pueden representarse mediante el diagrama de Ven ñ Euler.



$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Donde:

N representa los números **Naturales**
Z los números **Enteros**
Q números **Racionales**
R números **Reales**

En este diagrama se representa $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (el conjunto de los números **Naturales** está contenidos en los **Enteros** y a su vez, el conjunto de los **Enteros** está contenidos en los **Racionales** y estos ˙últimos están contenidos en los **Reales**.)

A continuación se definirán cada uno de estos tipos de números, empezando por los Naturales.

1.2.1. NUMEROS NATURALES:

Matemáticamente se denota al conjunto de los números con la **N** , Tal letra
que:

N = { 1,2,3,4, 5, 6, ... }

Con estos números se pueden realizar operaciones como suma, multiplicación y potenciación.

Los números Naturales tienen como subconjuntos los números pares, impares y primos.

- **Números Pares:** Se refiere a los números que son divisibles por dos 2 **,** es decir que se pueden dividir exactamente por 2 por ejemplo son el

2, 4, 6, 8, 10,12....

- **Números Impares:** son los números que son indivisibles por 2, es decir que no se pueden dividir por 2, ejemplo 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,15.....

- **Números Primos:** se dice que un número es primo si no tiene más divisores que Él mismo y la unidad, por ejemplo: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,.....ya que:

2 ˙nicamente se puede dividir por sí mismo $2 \div 2 = 1$ y por la unidad $2 \div 1 = 2$, es decir no se puede dividir por ningún otro número

$31 \div 31 = 1$ y por la unidad $31 \div 1 = 31$ no hay ningún otro número que divida exactamente a esté número.

$41 \div 41 = 1$ y por la unidad $41 \div 1 = 41$ no hay ningún otro número que divida exactamente a esté número.

Es importante observar que el ˙Nico **número par primo es el** **2**

1.2.2. NUMEROS ENTEROS:

Existe otro tipo de números, los **Enteros (Z).** Este conjunto de números esta· compuesto por los **enteros positivos (Z^+)** (que son los mismos Naturales), por los **enteros negativos (Z^-)** y por el **cero (0).** Con los números enteros se pueden realizar las mismas operaciones planteadas en los Naturales más la resta.

1.2.3 NUMEROS RACIONALES:

A los números racionales se le conoce como conjunto Q, está conformado por el cociente de números enteros. Todos los enteros pueden ser escritos como números racionales divididos por uno (1) por ejemplo $\frac{9}{1}, \frac{-7}{1}$ es decir que

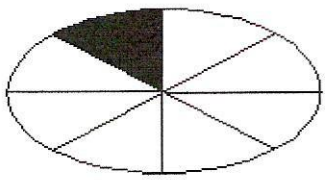
$$\mathbf{N \subset Z \subset Q}$$

1.2.3.1. Números Fraccionarios:

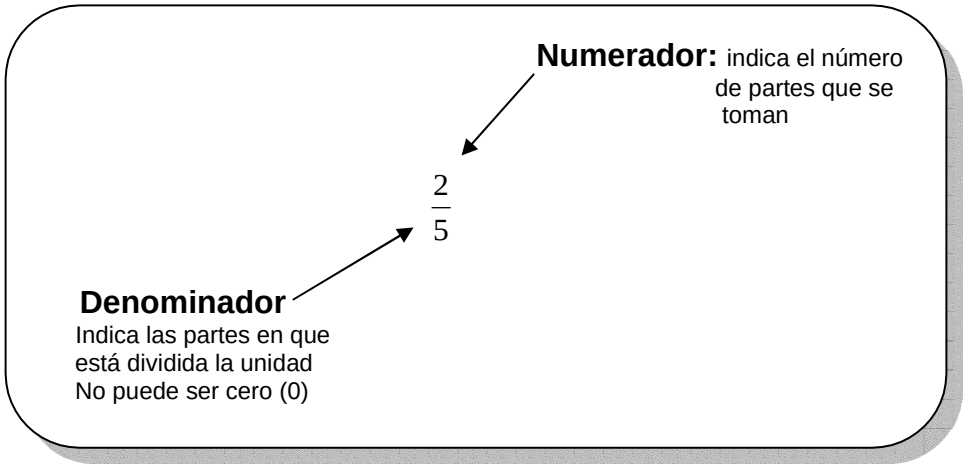
En diversas situaciones de la vida cotidiana es necesario trabajar con trozos de cosas como por ejemplo media pera, medio kilo de azúcar, un cuarto de arroba de yuca, y un cuarto de terreno de un lote, entre otras, estos son los Números Fraccionarios.

Por ejemplo, la siguiente figura se divide en ocho (8) partes y se toma una parte (la sombreada) esto equivale a decir: 1/8 donde el (1) representa al **numerador** (o sea las partes que se toman) y el ocho (8) **el denominador** (las partes en que está dividida la unidad).

$\frac{1}{8}$



Otro ejemplo de un número fraccionario es cuando un pan se divide en cinco (5) partes, **denominador** y se seleccionan 2 de estas porciones, **numerador**; este fraccionario se representa de la siguiente forma:


Numerador: indica el número de partes que se toman
2/5
Denominador
Indica las partes en que está dividida la unidad
No puede ser cero (0)

1.2.3.2. Suma y resta de fraccionarios: si se tiene la siguiente suma de números fraccionarios.

$$\underbrace{\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{4+8+1}{3}} = \frac{13}{3}$$

Denominadores Iguales

Se observa que todos los denominadores tienen el mismo número (3) o sea que las fracciones son **homogéneas.** Para la suma y resta de este tipo de fracciones se deja el mismo denominador (3) y se suman o restan los numeradores, de acuerdo con la operación planteada.

Ejemplos:

$$\frac{5}{4}+\frac{8}{4}+\frac{1}{4}-\frac{6}{4}= \frac{5+8+1-6}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3}-\frac{9}{3}= \frac{4+8+2-9}{3} = \frac{5}{3}$$

Existe otro tipo de fraccionarios, son los que tienen los denominadores diferentes. Este tipo de fraccionarios se denominan **No Homogéneos.**

Para llevar a cabo las operaciones de suma o resta de fraccionarios no homogéneos se debe primero hallar un denominador común para todas las fracciones y luego si realizar la operación de suma y resta de los numeradores. Veamos el siguiente ejemplo.

$$\underbrace{\frac{8}{3}+\frac{7}{5}+\frac{5}{6}}$$

Denominadores Diferentes

Como se trata de fraccionarios no homogéneos porque sus denominadores son diferentes **3, 5 y 6** se procede a hallar un denominador común, que divida exactamente a los tres denominadores.

☺

Una manera fácil para hallar el denominador común, es a través del mínimo común múltiplo m.c.m. el cual consiste en Dividir cada uno de los números dados Por su menor divisor y continuar con los cocientes hasta que todos los cocientes sean uno (1).

El m.c.m. es el producto de todos los divisores primos.

3 5 6	2 →
3 5 3	3
1 5 1	5
1 1 1	

Al analizar los denominadores 3, 5 y 6 podemos darnos cuenta que el menor divisor de estos tres números es 2, por lo tanto se divide el 6 por este número dando como resultado 3. Los otros números 3 y 5 como no son divisibles por 2 se dejan igual. Por esta razón en la segunda fila aparecen 3, 5 y 3, la cual se divide por 3 dando como resultado 1,5 y 1, la cual a su vez se divide por 5 hasta llegar a 1,1 y 1.

$2 \bullet 3 \bullet 5 = 30$

El m.c.m. se obtiene al multiplicar cada uno de los divisores primos 2.3.5 dando Resultado 30. Esto significa que 30 es el menor múltiplo de 3.5 y 6 y por tal razón, divide exactamente a estos números.

℘ Repasemos...

La multiplicación puede ser representada Por: El signo (x), por un (') o por un par de paréntesis ( ) ( )

El m.c.m, **(30)** se deja como el denominador común para todas las fracciones. Para hallar cada uno de los numeradores se procede de la siguiente manera: **el m.c.m. se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones dadas (3,5,6) y se multiplican por sus respectivos numeradores.**

$$\frac{8}{3}+\frac{7}{5}+\frac{5}{6}=\frac{(30\div 3)\cdot 8+(30\div 5)\cdot 7+(30\div 6)\cdot 5}{30}=\frac{80+42+25}{30}=\frac{149}{30}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Operar:

1) $\frac{7}{5}+\frac{8}{15}+\frac{11}{60}$

Como los denominadores son diferentes, se hallan el denominador común:

5	15	60	2
5	15	30	2
5	15	15	3
5	5	5	5
1	1	1	

m.c.m = $2^2 . 3 . 5 = 60$

Entonces el denominador común es (60). Para encontrar los términos de los numeradores respectivos se divide 60 entre cada uno de los denominadores de las fracciones y se multiplican por sus respectivos numeradores.

$$\frac{7}{5}+\frac{8}{15}+\frac{11}{60}=\frac{(60\div 5)\cdot 7+(60\div 15)\cdot 8+(60\div 60)\cdot 11}{60}=\frac{84+32+11}{60}=\frac{127}{60}$$

2) $\frac{31}{6}-\frac{25}{8}$

El m.c.m de 6 y 8:

6	8	2	2
3	4	2	2
3	2	2	2
3	1	3	3
1	1		

m.c.m.= $2^3 . 3 = 2 . 2 . 2 . 3 = 24$

El m.c.m. se deja como denominador común y los términos de los numeradores se forman dividiendo el 24 entre cada uno de los denominadores de las fracciones y multiplicándolos por los respectivos numeradores. La ˙nica diferencia entre la suma y la resta es que los términos de los numeradores se restan o se suman de acuerdo a la operación planteada.

$$\frac{31}{6}-\frac{25}{8}=\frac{(24\div 6)\cdot 31-(24\div 8)\cdot 25}{24}=\frac{124-75}{24}=\frac{49}{24}$$

3) $\frac{7}{20}+\frac{49}{16}-\frac{11}{5}$

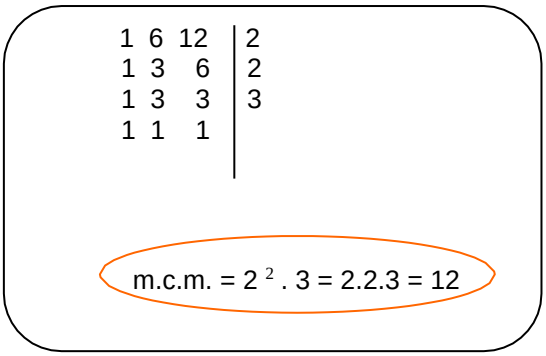
20	16	5	2
10	8	5	2
5	4	5	2
6	2	5	2
5	1	5	5
1	1	1	

m.c.m. = $2^4 . 5 = 2.2.2.2.5 = 80$

4) 9 - $\frac{31}{6}+\frac{49}{12}$

Recordando que todo número entero se puede convertir en Racional si se le coloca como denominador el número **uno (1),** la operación se plantea así:

$$\frac{9}{1} - \frac{31}{6} + \frac{49}{12}$$

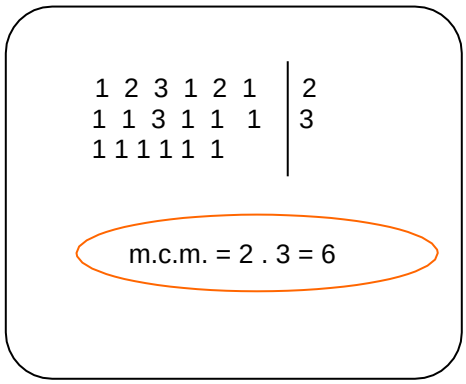


$$\frac{9}{1} - \frac{31}{6} + \frac{49}{12} = \frac{(12 \div 1) \cdot 9 - (12 \div 6) \cdot 31 + (12 \div 12) \cdot 49}{12} = \frac{108 - 62 + 49}{12} = \frac{95}{12}$$

5) 6 - $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 1$

Para poder realizar esta operación se tienen que convertir los números enteros a Racionales quedando de la siguiente manera:

$$\frac{6}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}$$



$$\frac{6}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}=$$

$$\frac{(6\div1)\cdot6-(6\div2)\cdot1+(6\div3)\cdot1-(6\div1)\cdot2+(6\div2)\cdot1-(6\div1)\cdot1}{6}=\frac{36-3+2-12+3-6}{6}=$$

$$\frac{20\div2}{6\div2}=\frac{10}{3}$$

Recordando la simplificación de fracciones, la cual Consiste en dividir tanto el numerador como del de Nominador por un mismo número, en este caso el Número 2

6) Operar los siguientes números racionales

$$5+4\frac{7}{8}+\frac{1}{3}$$

Este número se denomina **Mixto por que consta de una parte entera (4)** y un número fraccionario (7/8). Para poder desarrollar la operación es necesario convertir este mixto en número fraccionario. Esto se logra multiplicando el denominador de la fracción (8) por el número entero (4) y a este resultado se le suma el numerador de la facción (7). El resultado de esta operación 8 x 4 + 7 = 39 se deja como numerador de la nueva fracción y como denominador se deja el que tiene la fracción o sea (8)

Una vez hecha la conversión del Mixto a racional, queda:

$$\frac{5}{1}+\frac{39}{8}+\frac{1}{3}$$

1	8	3	2
1	4	3	2
1	2	3	2
1	1	3	3
1	1	1	

m.c.m. = 2^3 . 3 = 2 . 2. 2 . 3 = 24

1.2.3.3. Multiplicación de racionales:

Ejemplo:

Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican los numeradores entre sí, en este caso (4 x 7) = 28 y los denominadores también se multiplican entre sí (5x3) = 15

$$\frac{4}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{28}{15}$$

7) Realizar

$$\frac{7}{8}\times\frac{16}{21}=\frac{112}{168}=\frac{(112\div 2)}{(168\div 2)}=\frac{56}{84}=\frac{(56\div 2)}{(84\div 2)}=\frac{28}{42}=\frac{(28\div 2)}{(42\div 2)}=\frac{14}{21}=\frac{(14\div 7)}{(21\div 7)}=\frac{2}{3}$$

En este ejercicio se observa que al multiplicar los numeradores (7 x 16) el resultado es 112 y al multiplicar los denominadores (8 x 21) el resultado es 168. Pero tanto el numerador como el denominador son divisibles por (2), es decir se pueden dividir por (2), entonces se divide por este número, dando como resultado 56/84, estos a su vez se pueden dividir por (2) dando como resultado 28/42 y así se sigue dividiendo sucesivamente hasta cuando ya no se puedan dividir por ningún otro número, es decir obtener una fracción irreductible

8)

$$\frac{5}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{5\times 9\times 7}{6\times 7\times 3}=\frac{315}{126}=\frac{(315\div 3)}{(126\div 3)}=\frac{105}{42}=\frac{(105\div 3)}{(42\div 3)}=\frac{35}{14}=\frac{(35\div 7)}{(14\div 7)}=\frac{5}{2}$$

Es importante recordar algunas reglas de la divisibilidad:

- Un número es divisible por 2 cuando termina en número par o en cero
- Un número es divisible por 3 cuando al sumar las cifras que conforman el número da un múltiplo de 3. Ejemplo 315 es divisible por 3 porque al sumar 3+1+5 = 9 y este número es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 5 cuando termina en 5 o en cero.

9) $$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times 20=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{20}{1}=\frac{1\times 1\times 20}{4\times 5\times 1}=\frac{20}{20}=\frac{(20\div 20)}{(20\div 20)}=\frac{1}{1}=1$$

10) $3\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\times 2=\frac{7}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{2}{1}=\frac{14}{14}=1$

11) Calcular $\frac{5}{6}$ **de** 42

La palabra **de** indica **multiplicación**

$$\frac{5}{6}\times\frac{42}{1}=\frac{210}{6}=\frac{(210\div 2)}{(6\div 2)}=\frac{105}{3}=\frac{(105\div 3)}{(3\div 3)}=\frac{35}{1}=35$$

12) Hallar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de 30

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{30}{1}=\frac{2\times 4\times 30}{3\times 5\times 1}=\frac{240}{15}=\frac{(240\div 15)}{(15\div 15)}=\frac{16}{1}=16$$

1.2.3.4. División de Fraccionarios:

Ejemplo:

$$\frac{8}{5}\div\frac{3}{2}=\frac{8}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$$

Uno de los métodos para dividir dos fraccionarios es Multiplicar el primer fraccionario, en este caso 8/5 por el recíproco del segundo. Este recíproco se logra Invirtiendo el numerador y el denominador, o sea que Si se tiene 3/2, su recíproco ser· 2/3.

13) $\frac{9}{8}\div\frac{3}{4}=\frac{9}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{36}{24}=\frac{(36\div 2)}{(24\div 2)}=\frac{18}{12}=\frac{(18\div 2)}{(12\div 2)}=\frac{9}{6}=\frac{(9\div 3)}{(6\div 3)}=\frac{3}{2}$

14) $8\div\frac{9}{5}=\frac{8}{1}\times\frac{5}{9}=\frac{40}{9}$

15) $\frac{7}{9} \div 6 = \frac{7}{9} \div \frac{6}{1} = \frac{7}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{54}$

16) $\frac{8}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}}$

Extremo

Medios

Extremo

Teniendo en cuenta que un fraccionario siempre indica división, es decir si se tienen 8/9 significa que 8 se tiene que dividir por 9, un fraccionario divido por otro también se puede colocar uno sobre otro, en este caso **8/9 sobre 2/3.**

$$\frac{8}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{8 \times 3}{9 \times 2} = \frac{24}{18} = \frac{(24 \div 6)}{(18 \div 6)} = \frac{4}{3}$$

Este tipo de operación se efectúa por el métodos **PRODUCTO DE EXTREMOS**, como es el caso (8x3) sobre **PRODUCTO DE MEDIOS** (9X29).

17) $\frac{16}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{\frac{16}{7}}{\frac{4}{3}} = \frac{16 \times 3}{7 \times 4} = \frac{48}{28} = \frac{(48 \div 4)}{(28 \div 4)} = \frac{12}{7}$

18) $12 \div \frac{7}{6} = \frac{12}{1} \div \frac{7}{6} = \frac{12}{\frac{7}{6}} = \frac{12 \times 6}{1 \times 7} = \frac{72}{7}$

19) $\frac{7}{6} \div 5 = \frac{7}{6} \div \frac{5}{1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{1}} = \frac{7 \times 1}{6 \times 5} = \frac{7}{30}$

1.2.3.5. Números Decimales:

Dentro del conjunto de números racionales, se encuentra un conjunto numérico que es importante analizarlo y corresponde a los números decimales. Todos hemos escuchado la palabra decimal y globalizamos el concepto a números como 0,32, 1,25, 7,4 y 3,25 entre otros. En esta parte se pretende dar un formalismo matemático a este sistema numérico que es muy aplicado en todas las ·reas del conocimiento.

Para hablar de números decimales, es pertinente recordar qué es un racional y especialmente los números fraccionarios, ya que todo número fraccionario se puede escribir como número decimal.

1.2.3.5.1. Fracción decimal: se refiere a toda fracción, cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, como por ejemplo:

$\frac{8}{10}$ también se puede representar como 2×10^{-1},

$\frac{57}{100}$ también se puede representar como 57×10^{-2}

$\frac{5}{1000}$ también se puede representar como 5×10^{-3}

El número decimal que se obtiene de una fracción decimal se halla de la siguiente forma: se coloca el numerador que tiene la fracción decimal, colocándole una coma (,) o un punto (•) a su derecha, luego esta coma o punto se corre hacia la izquierda cuantos ceros tenga el denominador, por ejemplo:

$\boxed{\frac{8}{10}}$ Se coloca el numerador (8,) y como el denominador (10) tiene un solo cero, se cuenta una sola cifra hacia la izquierda, partiendo del (8), entonces el número decimal queda:

0, 8

$\boxed{\frac{17}{100}}$ Se deja el numerador (17) y como el denominador tiene dos ceros, se cuentan dos cifras hacia la izquierda colocándose la respectiva coma:

0,17

$\frac{56}{1000}$ Lo mismo que en el caso anterior, se deja el numerador (56) y se corren hacia la izquierda tres cifras, porque el denominador tiene tres (3) ceros : 0,056

$\frac{5}{10} = 0,5$

$\frac{7}{100} = 0,07$

$\frac{9}{1000} = 0,009$

$\frac{85}{1000} = 0,085$

1.2.3.5.2. OPERACIONES CON LOS NUMEROS DECIMALES:

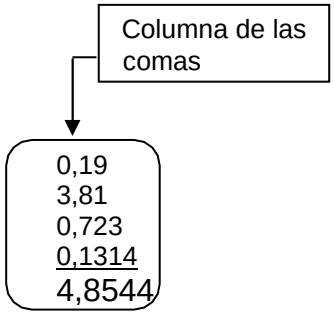
Las operaciones que se pueden realizar con este tipo de números son iguales a las que se hacen con los enteros

- **Suma:**

Se colocan los sumandos unos debajo de los otros, de tal forma que las comas o puntos decimales queden en columna. Se realiza la operación en forma similar a los enteros, colocando en el total la coma de manera que coincida con la columna de las comas.

Ejemplo:

Realizar la siguiente suma:



• **Resta**: se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de tal forma que las comas de los decimales queden en columna y se realiza la operación igual que con los números enteros. Ejemplo

```
  539,72
- 11, 184
_________
```

Cuando el minuendo o el sustraendo tienen diferentes números de cifras decimales, se pueden completar con ceros, por ejemplo 539,72 tiene dos cifras decimales, mientras 11,184, entonces se le coloca un cero a 539,72 para igualarlos.

```
  539,720
- 11, 184
_________
  528,536
```

• **Multiplicación:** Para multiplicar dos decimales o un entero por un decimal, se multiplican como si fueran enteros, corriéndose, en el producto, de la derecha a la izquierda tantas cifras tengan el multiplicando y el multiplicador.

```
 14,35
 x 8,34
_______
   5740
  4305
11480
_________
119,6790
```

Se corren cuatro cifras a la izquierda porque cada uno de los factores tiene dos cifras decimales.

• **División:** Para dividir números decimales, si no son homogéneos, es decir si no tienen el mismo número de cifras decimales, se selecciona el término que tenga mayor número de cifras decimales y se multiplican los dos términos (dividendo y divisor) por la unidad seguida del número de ceros igual al número de cifras decimales que tiene el de mayor número. Luego si se realiza la división de la misma forma que en los números enteros y que ya a esta altura del curso se debe dominar.

Ejemplo: Dividir

$0,5 \div 0,001$

$0,5 \times 1000 = 500$

$0,001 \times 1000 = 1$

Como estos números no son homogéneos, se procede a transformarlos en homogéneos, para esto se selecciona el que mayor número de decimales tiene, en este caso 0,001 este número tiene tres cifras decimales y se procede a multiaplicar los dos términos (dividendo y divisor) por la unidad con el número de ceros equivalente a las tres cifras decimales es decir por 1000.

Recordando que para multiplicar por 10, 100, 1000, Ö se corre la coma hacia la derecha tantas veces indica el número de ceros, por ejemplo si es por 100 se
corren dos cifras, si es por 1000 se corren tres cifras.

Ahora se realiza la división común y corriente: $500 \div 1 = 500$

Ejemplo: Dividir:

$99 \div 0{,}0003$

Se convierte a homogéneos y el mayor número de decimales tiene 4 cifras, entonces los dos, tanto dividendo como divisor se multiplican por 10000.

$99 \times 10000 = 990000$

$0{,}0003 \times 10000 = 3$

Ahora si se procede a realizar la división con números enteros:

$$990000 \div 3 = 330000$$

1.2.3.5.3. Clase de números decimales:

- **Decimales exactos:** Son aquellos que provienen de una fracción, cuya división es exacta.

Ejemplos:

$\frac{2}{4} = 0{,}5$ porque al efectuar la división su residuo es cero

$\frac{12}{40} = 0{,}3$

- **Decimales periódicos:** Son aquellos que provienen de una fracción, que al hacer la división presenta un residuo que se repite infinitas veces.

Por ejemplo : $\frac{2}{9}$ origina un decimal periódico.

```
20      | 9
 20     |
  20    | 0,222
   20   |
    2
```

Se puede observar en la división que el residuo siempre va a ser el número 2.

Entonces 0.222... es un decimal periódico, el número que se repite es el dos.

0,3434343... Es un decimal periódico, donde el número que se repite es el 34.

5,13213213213... Es un decimal periódico, cuyo valor que se repite es el 132

☺
Cuando los números decimales periódicos no tienen fin, existe una manera de escribirlos en forma simplificada y es colocándole una rayita encima a los números que se repiten.

Ejemplos:

0, $\overline{8}$ La rayita encima del ocho, indica que este se repite infinitas veces.

0, $\overline{87}$ Indica que el 87 se repite infinitas veces.

7, $\overline{524}$ Indica que el 524 se repite infinitas veces.

- **Decimal mixto:** Es aquel que tiene una parte exacta y una parte periódica.

Veamos algunos ejemplos:

0, 8333Ö. En este número la parte exacta es el 8 y la parte periódica es el 3.

7,99555Ö En este número la parte exacta es el 99 y la parte periódica es el 5.
0, 763494949Ö. En este número la parte exacta es el 763 y la parte periódica el 49.

Cabe anotar que los anteriores números se pueden escribir también de la siguiente forma:

0, 83333Ö = 0, $8\overline{3}$

7,99555Ö = 7, $99\overline{5}$

0,7634949Ö = 0, $763\ \overline{49}$

• **Decimales no periódicos:** Son números que provienen de una fracción racional, que al hacer la división, el residuo en cada paso de esta· es diferente. Estos decimales tienen gran importancia por las características especiales que tienen, lo cual se puede estudiar en un curso de Topología. Por ahora lo primordial es conocer este conjunto numérico.

Algunos ejemplos de este tipo de decimales son:

0,12345....
2,3467214
0,123132452856....

Como se puede observar, estos números **No** tienen una secuencia de repetición.
Dos números irracionales que merecen ser destacados son:

Número $\boxed{\hat{I} \cong 3{,}141592654 \ldots .}$ se define como la relación de :

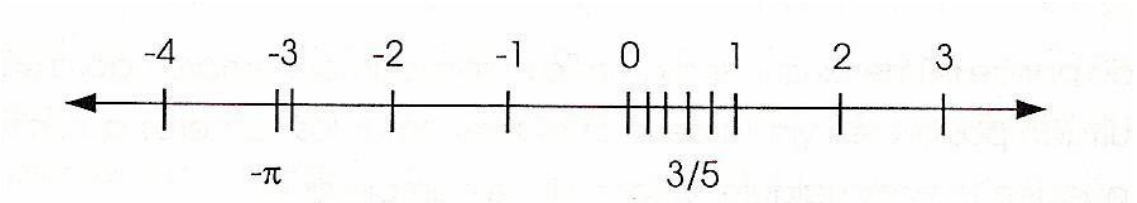
$$\frac{\text{Longitud de la Circunferencia (L).}}{\text{Diámetro (D)}}$$

Este número es utilizado para la medición de ·nulos en el sistema hexadecimal, o sea los radianes, donde se sabe que $\hat{I}$ = 180e o sea media vuelta a un círculo.

Número $\boxed{e =: 2{,}71828183....}$ usando como base de los logaritmos naturales o Neperianos.

1.2.4 NUMEROS REALES:

En general los números reales son todos los que hemos estudiado hasta el momento. Una de las principales características de los números reales es la de poder ser graficados en una recta. Esta es la recta real y esta constituida por puntos los cuales representan un número real que puede ser racional o irracional (estos ˙últimos, se refieren a los que tienen un número infinito de decimales, por ejemplo, el número $\hat{I} \cong 3,14159....$, por este motivo no es considerado fraccionario. Los números irracionales se denotan con la letra **(Qí)**



En la gráfica, las líneas verticales representan cada uno de los enteros, que se muestran en la parte superior, los de la izquierda son los enteros negativos (Z^-) y los de la derecha son los enteros positivos (Z^+), las flechas que se observan en los extremos indican que la recta se extiende hasta el infinito en ambos sentidos. Es importante resaltar que también se pueden representar los números racionales (Q), por ejemplo 3/5, es decir se divide la unidad en cinco partes y se toman tres (3) partes de esta. Los números irracionales también pueden ser mostrados en la recta real, con la salvedad que deben ser aproximados a un número decimal finito, en el presente ejemplo - π es aproximadamente -3,14.

1.2.5. PROPIEDADES DE LOS NUMEROS:

Para que las matemáticas lograran entenderse unos con otros hubo necesidad de proponer ciertas reglas mínimas de manipulación de los números y símbolo para poder operarlos, esta forma estricta de comunicación de sus conocimientos permitió un sólido desarrollo de esta ciencia y de otras que la usan como herramienta, por ejemplo la física. A continuación describiremos las propiedades o reglas básicas de las que hablamos para las operaciones de la suma y la multiplicación.

• **UNICIDAD:** Para todo par de números que sumamos o multiplicamos siempre habrá· un solo resultado posible, en virtud de lo cual si tenemos los números abac y d (que pueden tomar cualquier valor real) se cumple que:

Si a = b y c = d, entonces a + c = b + d

Si a = b y c =d, entonces ac = bd

☺
En ·algebra la multiplicación de dos
se puede escribir mediante un punto (a • b)
o simplemente colocándolas juntas (ab), para
evitar confundir el operador por (x) con la letra
equis.

Veamos un ejemplo:

$\frac{8}{4} = 2$ y $\frac{1}{2} = 0.5$

Por lo que,

$2 + 0.5 = \frac{8}{4} + \frac{1}{2}$ Û $2.5 = \frac{10}{4}$

Por analogía:

$2 \bullet 0.5 = \frac{8}{4} \bullet \frac{1}{2}$

$1 = \frac{8}{8}$

- **CONMUTATIVA:**

Si a y b son números reales, se cumple que:

a + b = b + a (El orden de los sumandos no altera la suma)

ab = ba (El orden de los factores no altera el producto)

- **ASOCIATIVA:**

Las operaciones de suma y multiplicación se realizan siempre entre dos números a la vez, así si queremos sumar los números 1,3 y 5 sumamos primero dos de ellos y más adelante sumamos el tercero al resultado, una posible forma de hacerlo sería: 1 + 3 = 4, y 4 + 5 = 9, pero podríamos empezar haciendo 1 + 5 = 6 y después 6 + 3 = 9 para obtener el mismo resultado.

Análogamente con la multiplicación primero haríamos 1 x 3 = 3 y luego 3 x 5 = 15 pero es equivalente a: 1 x 5 = 5 y 5 x 3 = 15. A esta característica de los reales se le llama propiedad asociativa, por lo tanto, con a, b y c reales se cumple que:

(a+b)+c = a + (b + c)

(ab) c = a (bc)

- **MODULOS DE LA SUMA Y LA MULTIPLICACION:**

Cuando a una cantidad real se le suma cero (0), el resultado es la misma cantidad, por lo tanto, **el numero cero (0) se conoce como el módulo de la suma.**

Por ejemplo: 75 + 0 = 75; 15 + 0 = 15; 27 + 0 = 27

En **la multiplicación el módulo es el uno (1)**, porque al multiplicar un número real por uno (1) se obtiene el mismo número.

Ejemplos: 7 x 1 = 7; 58 x 1 = 58; 999 x 1 = 999

- **INVERSO ADITIVO Y MULTIPLICATIVO:**

Se conoce como inverso aditivo se refiere al número que sumando con su opuesto da como resultado cero (0).

Ejemplos:

7 + (- 7) = 0, entonces el inverso aditivo de 7 es ñ7.

-68 + 68 = 0 entonces el inverso aditivo de ñ68 es 68.

El inverso multiplicativo o reciproco se refiere al número que multiplicado por su respectivo reciproco se obtiene como producto el numero uno (1) o la unidad.

Ejemplos:

$7 \times \frac{1}{7} = 1$; entonces el reciproco de 7 es $\frac{1}{7}$ o también $\frac{1}{7}$ es el reciproco de 7.

Una manera de presentar los recíprocos es con el exponente negativo (-) por ejemplo:

El reciproco de 2 es $\frac{1}{2}$ porque 2 x $\frac{1}{2}$ = 1 , la otra forma de expresarlo es

3 x 2^{-1} = 1.

El reciproco de 7 es $\frac{1}{7}$ porque 7 x $\frac{1}{7}$ = 1 o también 7 x 7^{-1} = 1.

El reciproco de $\frac{6}{5}$ es $\frac{5}{6}$ porque $\frac{6}{5} \times \frac{1}{\frac{6}{5}}$ $\frac{6}{5} \times \frac{5}{6}$ = 1.

- **DISTRIBUTIVA:**

Cuando necesitamos hacer una multiplicación complicada, como por ejemplo 6 x 26 lo más fácil (en caso de no conocer de memoria la tabla del veintiséis) es descomponer uno de los números así:

26 = 20 + 6 y luego multiplicar cada uno de los nuevos sumandos por 6 así: (20 x 6) + (6 x 6) lo que nos facilita la labor. El resultado final ser· 120 + 36 = 156. La propiedad que nos permite hacer lo anterior es precisamente la propiedad distributiva, en la cual si a, b y c son reales:

a(b + c) = ab + ac

(b + c)a = ba + ca

Esta propiedad nos enseña la forma correcta de *romper* paréntesis, siempre debemos tener en cuenta que se debe multiplicar al factor único (a en nuestro caso) por todos los sumandos el paréntesis, sin excepción .

Por ejemplo:

54 (2/27 + 5/2) = 54 (2/27) + 54 (5/2) = 4 + 135 = 139

1.2.6. VALOR ABSOLUTO:

El valor absoluto es una propiedad asociada a cada número que se denota por $|x|$, donde x es cualquier número real. Para poder comprender mejor la propiedad de valor absoluto lo mejor es utilizar algunos ejemplos:

$|-7| = +7$

$|+5| = +5$

$\left|+\frac{3}{4}\right| = +\frac{3}{4}$

$|0| = 0$

$|+7-10| = +3$ (Se hace primero la operación dentro del valor absoluto).

En síntesis el valor absoluto le asigna el valor positivo correspondiente a cualquier número, sea positivo o negativo. Al cero (que no es positivo ni es negativo) le asigna el cero (0).

Como el conjunto de los Reales involucra a los conjuntos N, Z, Q, Q^- entonces las operaciones que se pueden realizar con este tipo de conjuntos son: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

Como se supone que a esta altura, las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) ya han sido estudiadas y asimiladas, a continuación solamente se trabajaron las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación).

AUTOEVALUACION 1: CONJUNTOS Y NUMEROS

1. Diga cuál de los siguientes conjuntos es un conjunto vacío?

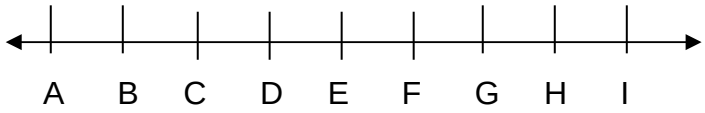
   a- $\{0\}$
   b- $\{\ \}$
   c- ϕ
   d- $\{\phi\}$

2. Basándose en la recta siguiente conteste:

   a- Ø Cuantos números enteros hay entre A y F?

   b- Ø Qué número es la mitad entre C y G?

   c- Ø Qué número representa un tercio entre B y H?



3. Sean a,b,c y d números reales:

   øEs a+3=b+3?

   øEs 3.b = b.3?

4. qué propiedad o propiedades justifican los siguientes enunciados?

   a- (8+10)+24=8+(10+24)
   b- 7(2+3)=7(3+2)

5. Usando las propiedades descritas en el capítulo halle:

   (31 x 7) + (31 x 3)

   15 (3/5 + 2/3)

6. cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

a- $\left|+5\right|+\left|+2\right|=7$

b- $\left|+5\right|-\left|+5\right|=10$

c- $\left|+5\right|+\left|-5\right|=2\bullet\left|+5\right|$

d- $\left|-3+-6\right|=9$

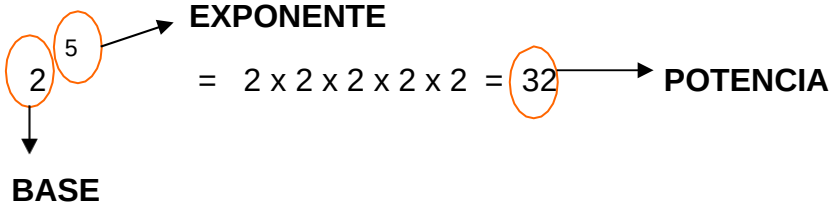
e- $-\left|+8-4\right|=4$

Por último demuestre mediante diagramas de Ven que:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.2.7. POTENCIACION:

La potenciación es una operación que simplifica la multiplicación, ya que se puede decir que la potenciación es una multiplicación sucesiva. Esta operación es ˙tal para abordar temas como la suma y resta de fraccionarios y simplificación, entre otras, por lo tanto es necesario tener muy claro el concepto de potenciación.



BASE: Se refiere al número que se multiplica por sí mismo, en este caso **2**

EXPONENTE: Es el número de veces que se repite (o que se multiplica) la base, en este caso **5**

POTENCIA: Es el resultado de multiplicar la base tantas veces indica el exponente, en el ejemplo, **32**

Veamos otros ejemplos de potenciación:

$3^3 = 3 \bullet 3 \bullet 3 = 27$

$7^4 = 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 = 2401$

$b^5 = b \bullet b \bullet b \bullet b \bullet b$

Matemáticamente la potenciación se representa:

$$\boxed{a^n = p}$$

a = **BASE.** Número que se multiplica por sí mismo.

n = **EXPONENTE.** Las veces que se multiplica la base por sí misma.

p = **POTENCIA.** Es el resultado de la operación.

-) Potencia de base positiva. Cuando la base es positiva y el exponente positivo, la potencia es positiva. Es el caso de los ejemplos anotados anteriormente. A continuación se relacionan otros ejemplos:

$5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 = 5^4 = 625$

$12 \bullet 12 \bullet 12 = 12^3 = 1728$ [*comprobar los resultados*]

-) Potencia de base negativa. Cuando la base es negativa, se presenta dos casos:

• Si el exponente es **PAR**, la potencia es positiva.

Ejemplos

$(-4)^2 = (-4) \bullet (-4) = 16$

$(-5) \bullet (-5) \bullet (-5) \bullet (-5) = (-5)^4 = 625$

• Si el exponente es **IMPAR**, la potencia es negativa.
Ejemplos

$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^5 = -3125$

-) Potencia de exponentes negativo:

Cuando el exponente es negativo, aplicamos el recíproco para desarrollar la operación.

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$

Se debe tener cuidado con el manejo de los signos negativos, el paréntesis indica que el número está afectado por el signo, veamos los siguientes casos:

$(-7)^2 = 49$, mientras que $-7^2 = -49$

1.2.7.1. PROPIEDADES DE LA POTENCIACION:

- **Potencia de exponente cero:** Toda base cuyo exponente es cero (0), la potencia es la unidad (1).

$$3^0 = 1$$

Ejemplos:

$x^0 = 1$

$36^0 = 1$

- **Potencia de exponente uno:** Toda base cuyo exponente es la unidad, tiene como potencia, la misma cantidad. (Ley modulativa de la potencia).

$$3^1 = 3$$

Ejemplos

$57^1 = 57$

$X^1 = X$

- **Potencia de bases iguales:** cuando se tienen dos o más bases iguales multiplicándose entre sí, se operan, dejando la misma base y sumando los exponentes.

$$3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^6 = 3^{3+5+6} = 3^{14}$$

Ejemplos:

$7^4 \cdot 7^3 \cdot 7^1 = 7^{4+3+1} = 7^8$

$z^a \cdot z^b \cdot z^c = z^{a+b+c}$

- **Potencia de un producto:** cuando se tiene un producto de varios términos, elevados al mismo exponente, se expresa como producto de cada uno de los términos elevados al mismo exponente.

$(4 \cdot 7 \cdot 9)^3 = 4^3 \cdot 7^3 \cdot 9^3$

$(x \cdot y \cdot z)^b = x^b \cdot y^b \cdot z^b$

- **Potencia de un cociente**: para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes

$$3^8 \div 3^5 = 3^{8-5} = 3^3$$

Ejemplos:

$15^7 \div 15^4 = 15^{7-4} = 15^3 = 3375$

$3^6 \div 3^1 = 3^{6-1} = 3^5$

$C^7 \div C^5 = C^{7-5} = C^2$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$(\frac{y^{a}}{y^{b}}) = y^{a-b}$$

- **Potencia de una potencia:** Cuando una potencia esta elevada a otra potencia, la potencia tiene como base, la base de la potencia y como exponente el producto de los exponentes.

$$((3^{4})^{3}) = 3^{4\times3} = 3^{12}$$

Ejemplos:

$$(((5^{3})^{5})^{2}) = 5^{3\times5\times2} = 5^{30}$$

$$(z^{a})^{b} = z^{ab}$$

$$(((7^{5})^{4})^{3} = 7^{5\times4\times3} = 7^{60}$$

- **Potencia de un exponente negativo:** Como vimos antes, cuando el exponente es negativo, se aplica el reciproco o inverso multiplicativo.

Ejemplos:

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^{2}} = \frac{1}{16}$$

1.2.7.2. CLASES DE POTENCIAS:

Existen dos tipos de potencias especiales, que se identifican según su base.

- **Potencia Base Decimal:** es toda aquella potencia cuya base es 10.

Ejemplos:

$10^{2} = 100$

$10^{-2} = \frac{1}{10_{2}} = \frac{1}{100}$

• **Potencia Base Natural:** se refiere a toda aquella potencia cuya base es el número *e.* Conocido como el número de Euler ($e \cong 2{,}71828182$Ö..)

Ejemplos:

$e^{1} = e$

$e^{3} = 20{,}08553$

AUTOEVALUACION 2: POTENCIACION

Realizar las siguientes operaciones:

1) 9e

2) -5^{1}

3) $(-5)^{4}$

4) $(-3)^{2} + (-2)^{3}$

5) $(x^{2} x^{4})^{3}$

6) $(y^{3} z^{4})^{5}$

7) $\left(\frac{2^{2}5^{-3}}{2^{4}5^{-7}}\right)^{3}$

8). $(3^{-2}+\left[2^3+4^2\right]-10-)$

9) $5^3+\frac{4^2}{3^{-2}}-(-7)^{-2}$

10) $\left[\frac{x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{y^{-3}z^{-4}3^4}\right]^{-2}$

1.2.8. RADICACION:

Es una operación inversa a la potenciación y consiste en hallar la **base,** conociendo el exponente y la potencia.

$$7^3 = 7 \bullet 7 \bullet 7 = 343$$

Entonces, para conocer la base se acude a la radicación $\sqrt[3]{343} = 7$ donde:

3 es el **índice** de la raíz (en la potenciación es el exponente)

343 es el **radicando** (este número corresponde a la potencia en el caso de potenciación)

7 es la raíz cubica (3) de 343 (en la potenciación corresponde a la base)

Matemáticamente la radicación se puede expresar así:

$$\sqrt[n]{r} = m$$

n = índice, el cual es un número entero positivo, mayor o igual a 2.

r = Radicando, es la cantidad a la cual se le va a extraer la raíz n-esima. Esta cantidad puede ser positiva o negativa, según el caso.

m =La raíz n-esima de *r*, este valor puede ser positivo, negativo o los dos, según el caso.

Entonces la expresión $\sqrt[n]{r}$ **= m** también se puede expresar como: **m** $^{n} = r$

1.2.8.1. CLASE DE RAICES:

- **Raíces de Indice par :** ***(r = par)***

Las raíces de Índice **par** tienen solución para números reales (radicando) mayores o iguales a cero. $r \geq 0$ en este caso la solución es doble, es decir una es positiva y la otra negativa.

Ejemplos:

$\sqrt{25} = \pm 5$, porque (+5) $^{2} = 25$ y (-5) ^{2} = 25

$\sqrt{36} = \pm 6$, porque (+6) $^{2} = 36$ y (-6) $^{2} = 36$

> ☺
>
> Cuando el Índice es dos (2) no se escribe, porque se asume que este es el mínimo que existe.

Ejemplos:

$\sqrt{625}$ = 25

$\sqrt[4]{4096}$ = 8

Cuando el radicando es negativo la solución NO es real, este tipo de solución se le ha llamado **IMAGINARIA**, la cual se estudiar· más adelante.

- **Raíces de Índice impar:** ***(r = impar)***

Las raíces de Índice impar tienen solución para cualquier número real r $\in$ R.
La solución depende de signo del radicando. Si el radicando es positivo, la

solución es positiva, pero si el radicando es negativo, la solución es negativa. Lo anterior indica que la solución de raíces de Índice impar es ˙nica.

Ejemplos:

$\sqrt[3]{729}$ = +9 porque: $9^{3} = 729$

$\sqrt[5]{-7776}$ = - 6 porque: $(-6)^{5}$ = -7776

1.2.8.2. PROPIEDADES DE LOS RADICALES:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ **(**es decir, un radical se puede presentar de dos formas: **con el símbolo de la radicación** $\sqrt{\ }$ o simplemente **el radicando con exponente fraccionario**, donde el numerador corresponde al exponente que tiene el radicando y el denominador al Índice de la raíz.

Por ejemplo $\sqrt[5]{25^2}$ puede representarse también como $25^{\frac{2}{5}}$; donde (2) es el exponente que tiene el radicando y (5) es el subíndice de esta raíz.

Ejemplos:

$\sqrt[7]{8^2} = 8^{\frac{2}{7}}$

$\sqrt[6]{9^5} = 9^{\frac{5}{6}}$

$\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ En este caso como podemos observar el radicando 3 no tiene

exponente, se supone que es uno (1).

$\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{1} = 1$

$\sqrt[n]{a} \ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Ejemplo:

$\sqrt{25} \ \sqrt{4} = \sqrt{25 \bullet 4} = \sqrt{100} = 10$

OJO:

$\sqrt{a+b}$ Es diferente $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

- $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$$

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ porque $a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

Ejemplo:

$\sqrt[5]{8^5} = 8$ Porque $8^{\frac{5}{5}} = 8^1 = 8$

$\sqrt[3]{5^3} = 5$ Porque $5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$

AUTOEVALUACION 3: RADICACION

Realice los siguientes ejercicios:

1) $\sqrt[3]{543}$

2) $\sqrt[3]{0}$

3) $\sqrt{5} \bullet \sqrt{10}$

4) $\sqrt[5]{-256}$

5) $\sqrt{\frac{1}{25}}$

6) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$

7) $\sqrt{-16} + \sqrt[4]{-16}$

8) $\frac{5}{\sqrt[3]{-125}}$

9) $\sqrt[4]{x^4 y^2 z^6}$

10) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[5]{y^{\frac{1}{2}}}}}$

1.2.9. LOGARITMACION:

Es otra de las operaciones inversa a la potencia y consiste en hallar el **exponente,** conociendo la base y la potencia.

$$7^{3} = 7 \bullet 7 \bullet 7 = 343$$

Como en la logaritmación lo que se halla es el exponente, en el ejemplo anterior queda: **Log $_{7}$ 343 = 3** (logaritmo en base 7 de 343 es igual a 3).

La forma general de representar la logaritmación es:

Log $_{a}$ x = y Es lo mismo que decir: $a^{y} = x$

Donde:

a = Base del logaritmo, es un número mayor que cero, pero diferente de uno, $a > 0$, y $a \neq 1$. Cuando *a* equivaler a 10 se le llama **logaritmo decimal** y se representa **Log.** Así mismo, cuando *a* vale *e* (Número de Euler) se le llama **logaritmo natural o neperiano** y se representa **Ln.**

x = Número al que se le extrae logaritmo. Este número *x* siempre ser· positivo $x > 0$. Esto nos indica que el **logaritmo de números negativos NO EXISTEN,** al igual que el logaritmo de cero o de un numero complejo.

y =Es el logaritmo, o sea el exponente al que se eleva a para ser igual a x

Este es positivo si x es mayor que uno ($x > 1$), y es negativo si x esta entre cero y uno ($0 < x < 1$).

Es importante recordar que el símbolo > indica mayor que y el símbolo < indica menor que, por ejemplo 5 > 3 (indica que 5 es mayor que 3) y 7 < 10 (indica que 7 es menor que 10).

Ejemplos:

Log $_{2}$ 64 = 6 porque $2^{6} = 64$

Log $_5$ 25 = 2 porque $5^2 = 25$

Log $_4$ 16 = 2 porque $4^2 = 16$

Log $_a$ b = 4 porque $a^4 = b$

- **Logaritmos decimales:** se caracterizan por tener la base 10

Log $_{10}$ 10 = 1 porque $10^1 = 10$

Log $_{10}$ 100 = 2 porque $10^2 = 100$

Log $_{10}$ 10000 = 4 porque $10^4 = 10000$ y así sucesivamente.

Log $_{10}$ 1 = 0 porque $10^0 = 1$ (recordemos que la potencia de una base elevada

al exponente cero (0) es igual a 1).

Es de aclarar que en los **Logaritmos Decimales** no es necesario colocar la base, se sobreentiende que es diez (10), entonces se pueden escribir de la siguiente forma:

Log x = y

Log 1 = 0

Log 10 = 1

Log 1000 = 3

Log $\frac{1}{10}$ = -1 . Como podemos observar en este caso el **logaritmo es**

Negativo porque la base $\frac{1}{10}$ esta entre cero y uno.

Log $\frac{1}{100}$ = -2

- **Logaritmo Natural:**

Como ya se había dicho anteriormente, cuando la base de un logaritmo es el número | e | , se le conoce como **logaritmo natural,** se puede escribir **:**

$Log_e x$ o **Ln(x)**

Ejemplos:

Utilizando la calculadora, hallar el logaritmo de los siguientes números:

Ln 1 = 0

Ln 2 = 0, 69314

Ln 20 = (completar)

Ln 0,5 = (completar)

1.2.9.1. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS:

→Logaritmo de uno es igual a cero: | Log 1 = 0 |

→Logaritmo de la base: | Log $_n n$ = 1 | Ejemplo: Log $_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$

→Logaritmo de un producto: | Log $_a PQ$ = Log $_a$P + Log $_a$Q |

Ejemplo:

Log $_2$(8 x 64) = Log $_2$8 + Log $_2$64 = 3 + 6 = 9

→Logaritmo de un cociente: | Log $_a \frac{P}{Q}$ = Log $_a$ P ñ Log $_a$ Q |

Ejemplo:

$\text{Log}_5 \left(\frac{125}{25}\right) = \text{Log}_5\ 125 \text{ ñ } \text{Log}_5\ 25 = 3 \text{ ñ } 2 = 1$

3 **2**

Porque $5^3 = 125$ **y Porque** $5^2 = 25$

AUTOEVALUACION 4: LOGARITMACION

1) $\text{Log}_4 64$
2) $\text{Log}_2 32$
3) $\text{Log}_5 125$
4) $\text{Log}_3 \frac{1}{9}$
5) Log 20
6) Log 10 + Log 1000
7) Log 50 ñ Log 70
8) Ln 10
9) Ln 100
10) Ln 1 + Ln (o)

1.2.10 NUMEROS COMPLEJOS:

Para hablar de los números complejos, es necesario primero estudiar los números imaginarios, lo cual haremos a continuación:

- **Números imaginarios:**

Los números imaginarios son aquellos que se obtienen de las raíces de números negativos, cuando el Índice es par. Por ejemplo el valor de $\sqrt{-9}$ no tiene solución en los reales, ya que **NO** existe un número real que al elevarlo a la dos (2) se obtenga -9, o sea : $x^2 = -9$ no tiene solución en los reales.

Para dar solución a este tipo de operaciones, los matemáticos han encontrado un sistema de numeración llamados **LOS IMAGINARIOS**, los cuales sirven para obtener la raíz par de un número negativo.

Los principios fundamentales de los números imaginarios son:

$\sqrt{-1} = i$ **i** **-1= i** ^{2}

Analicemos ahora como es el comportamiento de las potencias del número imaginario.

i = $\sqrt{-1}$ **= i**

i $^2 = (\sqrt{-1})^2 =$ **-1**

i $^3 = (\sqrt{-1})^2 \bullet \sqrt{-1}$ **= -1i = -i**

Para resolver un radicando negativo el Índice par, se procede de la siguiente forma:

Si se tiene $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \bullet (-1)} = \sqrt{16} \bullet \sqrt{-1} = 4 \bullet i = 4i$ porque la raíz de 16 es 4 y $\sqrt{-1} = i$.

$\sqrt{-45} = \sqrt{45 \bullet (-1)} = \sqrt{9 \bullet 5 \bullet (-1)}$ Porque 45 se puede descomponer en $9 \bullet 5$, nueve tiene raíz exacta que es 3 mientras que 5 no tiene raíz exacta entonces queda dentro del radical. Así mismo, $\sqrt{-1}$ **= i,** entonces el resultado es $3\sqrt{5}i$

Números Complejos:

Los números complejos son de la forma:

a + bi donde:

a y b = parte real, i = parte imaginaria

Los siguientes son números complejos:

7 + 8i -4 + 5i 7i 1 ñ i -4 ñ 5i 10 + 8i

☺
Todo número complejo tiene su conjugado, el cual es el mismo numero pero con el signo contrario en la parte imaginaria.

Numero	**Conjugado**
20 ñ 8i	20 + 8i
14 + 7i	14 ñ 7i
-13 ñ 3i	-13 + 3i

1.2.10.1. OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS:

→**Suma:** Dos o más números complejos se suman operando termino a término.

Ejemplos

(4 + 8i) + (5 + 6i) = (4+5)+(8i+6i)

Se suman las partes reales entre sí y las imaginarias entre

sí. (7-9i)+ (10+10i) = (7+10)+(-9i+10i) = 17 + 1i

→**Resta:** Se opera igual que la suma, solo que en este caso es restando.

Ejemplos:

(7+8i) ñ (12+5i) = (7-12) + (8i-5i) = -5 + 3i

(7-4i) - (14-8i) = (7-14) + (-4i+8i) = -7 + 4i

(-15-7i) ñ (-7-3i) = (-15+7) + (-7i+3i) = -8 ñ 4i

Me permito recordarles que cuando se suma o resta signos iguales, se realiza una suma y se deja el mismo signo, mientras que si se tienen signos contrarios, se restan y se deja el signo del número mayor.

Del resultado anterior, se puede observar que la suma Û resta de números complejos, origina otro número complejo.

→**Multiplicación:** La operación se hace de la siguiente manera:

$$(a+bi) \bullet (c+di) = ac + adi + bci + bdi^{2} = (ac \text{ ñ } bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo:

$(5+3i) \bullet (4+7i) = 5 \bullet 4+5 \bullet 7i+3i \bullet 4+3i \bullet 7i = 20+35i+12i+21i^{2} = 20 +47i +21i^{2}$

Recordemos que $i^{2} = -1$

Entonces: (5+3i) • (4+7i) = 20 + 47i ñ 21 = -1 + 47i

Ejemplo:

$(-3-8i) \bullet (2 \text{ ñ } 4i) = -3 \bullet 2 + (-3) \bullet (-4i) +(-8i) \bullet 2+ (-8i) \bullet (-4i) = -6+12i-16i+32i^{2}$

$(-3-8i) \bullet (2 \text{ ñ } 4i) = -6-4i+32i^{2} = -6-4i-32 = -38-4i$

Como se observar, la multiplicación de números complejos origina otro complejo.

→**División:** Para dividir números complejos, se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. Veamos:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \bullet \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+db)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos:

$$\frac{3+5i}{3-2i} = \frac{3+5i}{3-2i} \bullet \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{9+6i+15i+10i^2}{9-6i-6i-4i^2} = \frac{9+21i-10}{9+4} = \frac{-1+21i}{13}$$

$$\frac{1-8i}{2+i} = \frac{1-8i}{2+i} \bullet \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i-16i+8i^2}{4-i^2} = \frac{2-17i-8}{4+1} = \frac{-6-17i}{5} = \frac{1}{5}(-6-17i)$$

AUTOEVALUACION 5: NUMEROS COMPLEJOS

Efectuar las siguientes operaciones:

1) $i^4 =$

2) $i^5 =$

3) $\sqrt{-36} =$

4) $\sqrt{-50}$

5) $\sqrt{-98} - \sqrt{-162} =$

6) $\sqrt{-25} + \sqrt{-36} =$

7) El conjugado de (-5+4i) es:

Realizar las operaciones indicadas:

8) (a+bi) + (x-yi)

9) (-5i+3) - (8+3i)

10) (3-8i) ÷ (4+2i)

11) i • (3-i)

CAPITULO 2

ALGEBRA

INTRODUCCION:

Estudiar matemáticas es como hacer un repaso por la historia de la humanidad, sobre todo por las formas de organizar los pensamientos que han usado nuestros ancestros. Medir y contar fueron las primeras actividades matemáticas del hombre primitivo. Haciendo marcas en los troncos de los árboles lograban, estos primeros pueblos, la medición del tiempo y el conteo del número de animales que poseían; así fue que surgió la Aritmética. El origen del ¡algebra es posterior. Pasaron cientos de siglos para que el hombre alcanzara un concepto abstracto del número, base fundamental para la formación de la ciencia algebraica. El ·algebra es, por lo tanto, una de estas formas de pensar de las que hablamos, y es el primer gran paso para generalizar procesos matemáticos. De ahora en adelante podremos estar preparados para dar respuestas a problemas más grandes, para los cuales anteriormente deberíamos hacer largos y desgastantes procesos de solución.

AUTOEVALUACION INICIAL

Así como en el capítulo anterior, lo invitamos a desarrollar esta evaluación, con el propósito de que establezca qué tanto sabe sobre la temática que se va a tratar y así se motive para aprender las temáticas que crea no domina.

1. Simplificar: $-\{-[-(a+b-c)]\}-\{+[-(c-a+b)]\}+\{-[-a+(-b)]\}$

2. Multiplicar: $(3a^2-2a^2+5a-2)\times(2a^2+4a-3)$

3. Dividir: $(6+x^2+5x)\div(x+2)$

Escribir por simple inspección el resultado de:

4. $(1-4ax)^2$

5. $(5a+x)^3$

6. $\dfrac{9-a^2}{3-a^2}$

Factorizar:

7. $a^2+a-ab-b$

8. $1-4c+4c^2$

9. $7b^2+6b^4-20$

10. Reducir a su más simple expresión: $\dfrac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$

11. Simplificar: $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}+\dfrac{\square(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

2. ALGEBRA:

Es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible. Al igual que para jugar un partido de basquetbol es necesario saber cuáles son las Reglas del juego, para el entendimiento del ·algebra es necesario conocer las reglas que se deben cumplir como por ejemplo, no se puede factorizar si no se sabe cómo sumar o restar términos semejantes, no se puede simplificar si no se tiene conocimiento sobre la factorización. A continuación se hace una síntesis de las principales pautas para el desarrollo del ·algebra.

2.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Las expresiones algebraicas son combinaciones de números y letras unidos por las operaciones fundamentales del ·algebra. Estas expresiones están formadas por:

$\Rightarrow$ **Términos:** Los cuales están compuestos por el **signo, coeficiente** (generalmente la parte numérica), **base** y **exponente.** Así por ejemplo, en el término

$5x^2$, el signo, aunque no está escrito, se sobreentiende que es positivo

(+), el coeficiente es 5, la base es x y el exponente es 2.

☺

Dos o más términos son semejantes cuando **tienen igual Base e igual exponente.**

Ejemplos:

⇒ Los siguientes términos son semejantes porque todos tienen como base

x y como exponente él 2.

Veamos, $2x^2, 5x^2, 8x^2, x^2, -10x^2$

Los signos de los cuatro (4) primeros son positivos y el del ˙último es negativo, los coeficientes de estos términos son: 2, 5, 8, 1 y -10 respectivamente.

Cabe recordar que cuando la base no tiene ningún coeficiente, como es nuestro caso $\mathbf{x}^2$, se sobreentiende que este es **1.**

⇒ Si se tienen los siguientes términos: $3x, 2y^2, 5y, 9x, 7x^2, 10x^2, 6x, 8y$

Los términos semejantes son:

$3x, 9x, 6x$

$7x^2, 10x^2$

$5y, 8y$

$2y^2$ no tiene otro término semejante

Una expresión algebraica puede definirse como la unión de términos algebraicos a través de las operaciones fundamentales del ·algebra como son la adición (suma) y la sustracción (resta).

Por ejemplo: $5x^2 + 3y + 8$

2.1.1. ADICION O SUMA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Toda expresión algebraica ligadas por los signos [+] y [-] se llama **Suma Algebraica.**

> ☺
>
> **Para desarrollar la suma algebraica de dos o más términos primero se buscan los términos semejantes y luego se suman o restan los coeficientes (dependiendo de la operación indicada) .**

Por ejemplo, La suma de:

$3x + 5y + 1$ y $2x - 3y + 8$ = $3x + 5y + 1 + 2x - 3y + 8$ Los términos semejantes de esta expresión es:

⇒ 3x + 2x = Se suman los coeficientes (3+2)=5 y se deja la misma base (x); entonces la expresión queda reducida a:

⇒ [5x]

⇒ 5y -3y = (5-3) y = [2y]

1+8 = [9]

El total de esta suma algebraica es [5x+2y+9]

EJERCICIOS RESUELTOS

Realizar las siguientes operaciones:

1. 7a + 2a + 5a = (7+2+5)a = 14a

2. -4b-9b = (-4-9)b = -13b

Recordemos que en una suma algebraica:

> ☺ REPASEMOS.....
>
> En la suma algebraica, cuando los términos tienen el mismo signo, se suman y se deja el mismo signo.

Entonces: -4 -9 = -13

> ☺ REPASEMOS.....
>
> En la suma algebraica, cuando los términos tienen diferentes signos, se restan y se deja el signo que tenga el número mayor.

Por ejemplo 5 ñ 8 = -3 porque como tienen diferentes signos, es decir uno es [+] y el otro [-], se restan y el resultado en este caso es 3 y el signo del número mayor absoluto es [-]

3. $8x^2+2x^2-6x-x^2=(8+2-6-1)x^2=3x^2$

4. $\frac{1}{5}c^3+\frac{7}{5}c^3-\frac{2}{5}c^3=\frac{(1+7-2)}{5}c^3=\frac{6}{5}c^3$

> ☺ REPASEMOS.....
>
> En la suma de fraccionarios homogéneos (tienen el mismo denominador), se suman sus numeradores y se deja el mismo denominador.

5. $\frac{3}{4}a^{m+1}-\frac{7}{4}a^{m+1}+\frac{11}{4}a^{m+1}-\frac{9}{4}a^{m+1}=\frac{(3-7+11-9)}{4}a^{m+1}=-\frac{2}{4}a^{m+1}=-\frac{1}{2}a^{m+1}$

6. $\frac{1}{2}b^{n-1}+\frac{2}{3}b^{n-1}-\frac{7}{6}b^{n-1}+\frac{1}{2}b^{n-1}-b^{n-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)b^{n-1}$

> ☺ REPASEMOS.....
>
> Para realizar una suma de fraccionarios No homogéneos**,** (diferentes denominadores), se halla el denominador común, el cual se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y este resultado se multiplica por su respectivo numerador.

Entonces:

$$\frac{((6\div 2)1+(6\div 3)2-(6\div 6)7+(6\div 2)1-(6\div 1)1)}{6}b^{n-1}=\frac{(3+4-7+3-6)}{6}b^{n-1}=\frac{-3}{6}b^{n-1}=\frac{-1}{2}b^{n-1}=-\frac{1}{2}b^{n-1}$$

7. $a^4b-a^3b^2+a^2b-8a^4b-a^2b-8+a^3b^2-7a^3b^2-7+21a^4b-a^3+48$

Los términos semejantes son:

$\Rightarrow a^4b-8a^4b+21a^4b=(1-8+21)a^4b=14a^4b$

$\Rightarrow -a^3b^2+a^3b^2-7a^3b^2=(1-1-7)a^3b^2=-7a^3b^2$

$\Rightarrow a^2b-a^2b=(1-1)a^2b=0a^2b=0$

$\Rightarrow -a^3$ No hay otro termino semejante

$\Rightarrow$ -8-7+48 = 33

Entonces: $14a^4b-7a^3b^2+0-a^3+33=$ $\boxed{14a^4b-7a^3b^2-a^3+33}$

8. $x^{a+2}-5x^{a+1}-6x^a-x^{a+3}+8x^{a+1}-10$

Los términos semejantes son:

$\Rightarrow x^{a+2}$ No tiene otros términos semejantes

$\Rightarrow -5x^{a+1}+8x^{a+1}=(-5+8)x^{a+1}=3x^{a+1}$

$\Rightarrow -6x^a$ No tiene otro término semejante

$\Rightarrow -x^{a+3}$ No tiene otro término semejante

$\Rightarrow$ -10 No tiene otro término semejante

El resultado es: $\boxed{x^{a+2}+3x^{a+1}-6x^a-x^{a+3}-10}$ Al ordenar en forma decreciente, de acuerdo al exponente se obtiene

$$\boxed{-x^{a+3}+x^{a+2}+3x^{a+1}-6x^a-10}$$

2.2. SIGNOS DE AGRUPACION:

Existen diferentes signos de agrupación o paréntesis que se emplean para indicar como unas todas las cantidades contenidas en estos: los más usados son:

Paréntesis ( ),

Corchete [ ],

La llave { }.

⇒ Por ejemplo: 3y + (x+y) significa que a la expresión 3y se le suma (x+y) entonces:

3y + (x+y) = 3y + x+y = 4y +x.

Para hallar el resultado es necesario eliminar el paréntesis y para ello es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

☺ REPASEMOS.....

Cuando un paréntesis esta precedido por el signo (+), se dejan las cantidades que están dentro del paréntesis con el mismo signo

⇒ Ejemplo:

2x + (5y -7x) = como al paréntesis le antecede el signo | + | , las

cantidades que están dentro de este quedan iguales:

= 2x + 5y -7x Agrupando términos semejantes queda: =-5x+5y

☺ REPASEMOS.....

Cuando un paréntesis esta precedido por el signo (-), las cantidades que están dentro del paréntesis cambian de signo al eliminar dicho paréntesis.

⇒ Ejemplo:

$4x^2 - (2x - 6x^2 + 7x)$ Como el paréntesis esta precedido por el signo [-] todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

$4x^2 - 2x + 6x^2 - 7x = 10x^2 - 9x$

EJERCICIOS RESUELTOS

Simplificar suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $7x + [x - (2x + y)]$

En este ejercicio se tienen que destruir dos paréntesis, para esto es necesario ir destruyendo paréntesis por paréntesis, empezando por el más interno (el que esta· contenido dentro del otro), entonces el proceso es el siguiente:

⇒ Destrucción del paréntesis más interno ( ) y como Este esta precedido del signo [-] , todos los términos contenidos en Este cambian, entonces:

$7x + [x - 2x - y]$

⇒ Luego se destruye el otro paréntesis [ ], en este caso esta precedido por el signo [+] , por lo tanto todos sus términos conservan el mismo signo

7x + x -2x -y

Y por ˙último se reducen los términos semejantes, entonces el resultado es

6x - y

2. $5b - [(b - c) - (b + c)]$

En este ejercicio, también se tienen dos tipos de signos de agrupación [ ] y los ( ) se pueden destruir al tiempo, porque no está uno dentro del otro, sino que están al mismo nivel entonces:

$$5b - \left[(b-c)-(b+c)\right] = 5b - \left[b-c-b-c\right]$$

Se observa que en el primero de estos paréntesis ( ) no aparece ningún signo que preceda a este paréntesis, pero cuando esto sucede tácitamente se sobreentiende que es + , entonces los términos (b-c) quedan con el mismo signo, mientras que el segundo paréntesis ( ) esta· precedido por el signo negativo razón por la cual sus términos cambian de signo.

Ahora se procede a eliminar el segundo signo de agrupación [ ] y como este esta· precedido por el signo - todos sus términos cambian, así:

$$5b - \left[(b-c)-(b+c)\right] = 5b - \left[b-c-b-c\right] = 5b-b+c+b+c$$

Por ˙último se reducen los términos semejantes:

$$5b-b+c+b+c = 5b + 2c$$

3. $m + \left\{(-2m+n)-(-m+n-p)+m\right\}$

Los signos de agrupación ( ) están contenidos dentro de { }. Los dos ( ) están al mismo nivel, es decir no está· contenido uno en el otro, razón por la cual se pueden destruir simultáneamente.

$$m + \left\{(-2m+n)-(-m+n-p)+m\right\} = m + \left\{-2m+n+m-n+p+m\right\}$$

Ahora se destruye la llave quedando:

m - 2m + n + m ñn +p + m

Por ˙último se reducen los términos semejantes

m + p

4. $2x - (-4x+y) - \{-[-4x+(y-x)-(-y+x)]\}$

Es este caso hay tres signos de agrupación que son ( ), { } y [ ] .

Inicialmente se pueden destruir los paréntesis ( ), porque el primero está libre y los otros dos son los más internos:

$2x \text{ ñ } (-4x+y) - \{-[-4x+(y-x)-(-y+x)]\} = 2x + 4x \text{ ñ } y - \{-[-4x+y-x+y-x]\}$

Ahora se destruye [ ]

$2x + 4x \text{ ñ } y - \{-[-4x+y-x+y-x]\} = 2x + 4x \text{ ñ } y - \{4x-y+x-y+x\}$

Luego la llave { }

$2x + 4x \text{ ñ } y - \{-[-4x+y-x+y-x]\} = 2x + 4x \text{ ñ } y \text{ ñ } 4x + y \text{ ñ } x + y \text{ ñ } x$

y por ˙último se reducen los términos semejantes

$2x + 4x \text{ ñ } y \text{ ñ } 4x + y \text{ ñ } x + y \text{ ñ } x = y$

5. $- \{-[-(m+n-p)]\} - \{+[-(p-m+n)]\} + \{-[-m+(-n)]\}$

Empezando por los paréntesis más internos ( ):

$-\{-[-(m+n-p)]\} - \{+[-(p-m+n)]\} + \{-[-m+(-n)]\} =$

$- \{-[-m-n+p]\} - \{+[-p+m-n]\} + \{-[-m-n]\} =$

Ahora se destruyen los corchetes [ ] :

$- \{-[-m-n+p]\} - \{+[-p+m-n]\} + \{-[-m-n]\} =$

$$-\{m+n-p\}-\{-p+m-n\}+\{m+n\}=$$

Luego se eliminan las llaves { } :

$$-\{m+n-p\}-\{-p+m-n\}+\{m+n\} = -\ m\ ñ\ n + p + p\ ñ\ m + n + m + n$$

Y por ˙último se reducen los términos semejantes

$$-\ m + n + 2p$$

2.3. MULTIPLICACION:

La multiplicación algebraica es una operación que al igual que en la aritmética, tiene por objeto hallar el producto de dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador. Para representar una multiplicación se usan los signos de

x , • Û ( ) ( ) , generalmente en ·algebra se usan las dos ˙últimas.

Por ejemplo, la siguiente multiplicación se puede representar como:

$6x^3 \times 5x^8$ Û $6x^3 \bullet 5x^8$ Û $(6x^3)\ (5x^8)$

La forma para solucionar esta multiplicación es:

⇒ Multiplicar los signos de estos factores, en este caso, $6x^3 \bullet 5x^8$ vemos que ambos son positivos (+) , porque en ninguno aparece el signo y cuando esto sucede se sobreentiende que es +

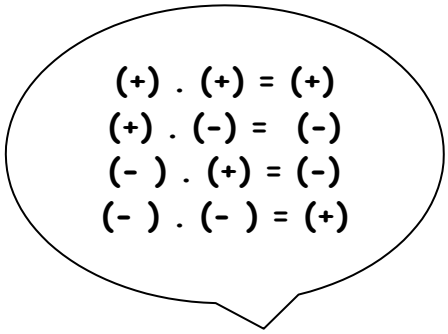
⇒ Luego multiplicar los coeficientes $6 \bullet 5 =$ 30

⇒ Luego multiplicar las bases, recordando las propiedades de la potenciación

$x^3 \cdot x^8 = x^{3+8} =$ X^{11}

⇒ Entonces el resultado es $30X^{11}$

Es importante recordar las reglas de los signos:



$\Rightarrow$ Ejemplo: Realiza la siguiente operación:

$(3a^3)(-7a^2)$

Primero se multiplican los signos en este caso: (+) (-) = -

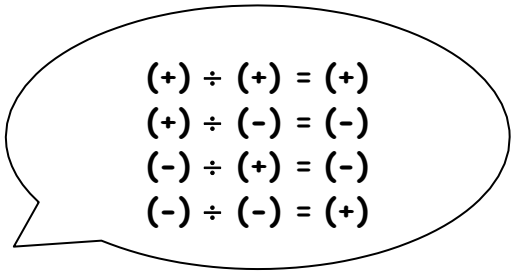
Luego se multiplican los coeficientes: (3) (7) = 21

En seguida las bases $(a^3)(a^2) = a^5$

Entonces el resultado es $-21\,a^5$

2.4. DIVISION :

Antes de iniciar la división algebraica, es necesario repasar las reglas de los signos:



También es importante recordar cuales son las partes de una división

Si se tiene $28 \div 7 = 4$

$\Rightarrow$ 28 es el **dividendo** , o sea la cantidad que ha de dividirse

$\Rightarrow$ 7 es el **divisor,** se refiere a la cantidad que divide

⇨ 4 es el **cociente,** resultado que se obtiene al realizar la

⇨ 0 es el **residuo**, en este caso es cero porque la división es exacta, es decir si una división es exacta, su residuo es cero (0)

REPASEMOS.....

Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se coloca como exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Realizar $a^8 \div a^3 = a^{8-3} = a^5$

2. Dividir $24\ a^7 \div 6\ a^2$

Para llevar a cabo esta división algebraica primero se dividen los signos, luego coeficientes y por ultimo las bases.

Primero se dividen los signos	(+) (+) = +
Luego se dividen los coeficientes	$24 \div 6 = 4$
En seguida se dividen las bases	$a^7 \div a^2 = a^{7-2} = a^5$
El resultado de esta división es:	$4\ a^5$

3. Dividir $(x^3 + x - 4x^2) \div x$

En este caso se divide cada uno de los términos del dividendo por el divisor así:

$x^3 \div x = x^{3-1} =$ $\boxed{x^2}$

$x \div x = x^{1-1} = x^0 =$ $\boxed{1}$ recordando que la potencia de cualquier base elevada al exponente cero (0) es igual a uno (1)

$-4x^2 \div x = -4x^{2-1} =$ $\boxed{-4x}$

Entonces el resultado es: $x^2 + 1$ ñ $4x$ ordenando queda x^2 ñ $4x + 1$

Otra forma de presentar esta división es:

$\frac{X^3}{X} =$ $\boxed{X^2}$

$\frac{X}{X} =$ $\boxed{1}$

$\frac{-4X^2}{X} =$ $\boxed{-4X}$

El resultado es: x^2 - $4x + 1$

4. Dividir: $(a$ ñ $20 + a^2) \div (a$ ñ $4)$

Para dividir dos polinomios es necesario los siguientes pasos, los cuales son similares a los de una división aritmética.

⇨ Se ordenan los polinomios colocando una de las letras en orden descendentes de sus exponentes:

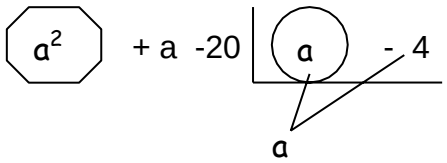
$a^2 + a - 20$ $\quad$ a - 4

⇒ El primer término del dividendo (a^2) se divide por el primer término del divisor (a) y el resultado de este corresponde al primer término del cociente:

$\boxed{a^2}$ + a -20 $\quad$ a $\quad$ - 4

$a^2 \div a = a$

Entonces



⇒ Se multiplica el primer término del cociente (a) por cada uno de los términos del divisor y este producto se resta de cada uno de los términos semejantes del dividendo.

$$a^2 + a - 20 \qquad a - 4$$
$$-a^2 + 4a \qquad\qquad a$$
$$0 + 5a - 20$$

Porque $a \bullet a = a^2$ este valor se le resta al primer término del dividendo a

- $(-4) = -4a$ este valor se le resta al segundo término.

⇒ El primer término del nuevo dividendo se divide por el divisor y se repite las operaciones de multiplicar el cociente por el divisor y restarle este producto al dividendo.

$$\begin{array}{l|l} a^2 + a - 20 & a - 4 \\ \hline -a^2 + 4a & a + 5 \\ \hline 0 + 5a - 20 & \\ -5a + 20 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Porque $5 \cdot a = 5a$ este valor se le resta al nuevo dividendo

5 • (-4) = -20 valor que también se le resta al dividendo.

⇒ Se repite la operación hasta que el residuo es cero o no se puede dividir mas.

5. Dividir $2\ a^3 - 2$ ñ $4a$ entre $2 + 2a$

Paso 1 organización:

$$2\ a^3 \ - \ 4a \ - 2 \ \big| \ 2a + 2$$

Es importante resaltar que en el dividendo, el exponente con mayor exponente es a^3, le seguirá en orden descendente a^2, pero en este caso no existe, razón por la cual se coloca un cero (0) en el espacio que le correspondería. Así mismo, como se ordenó el dividendo también se ordenan los términos del divisor.:

Paso 2:

$$\begin{array}{l|l} 2a^3 + 0 - 4a - 2 & 2a + 2 \\ \hline -2a^3 - 2a^2 & a^2 \\ \hline 0 - 2a^2 - 4a - 2 & \end{array}$$

Porque

$2a^3 \div 2a = 2a^2$

$a^2 \bullet 2a = 2a^3$ Este valor se le resta al primer término del dividendo

$a^2 \bullet 2 = 2a^2$ Este se le resta al segundo término (0) del dividendo

Paso 3, 4 y 5

$$\begin{array}{r|l} 2a^3 + 0 - 4a - 2 & 2a + 2 \\ \hline -2a^3 - 2a^2 & a^2 - a + 1 \\ \hline 0 \quad -2a^2 - 4a - 2 & \\ \quad 2a^2 + 2a & \\ \hline \quad 0 \quad -2a - 2 & \\ \quad +2a + 2 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

6. Dividir $\frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2$ entre $a - \frac{2}{5}b$

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2 & a - \frac{2}{5}b \\ \hline -\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}ab & \frac{1}{3}a \\ \hline 0 \quad + \frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2 & \end{array}$$

Porque $\frac{1}{3}a^2 \div a = \frac{1}{3}a$

$\frac{1}{3}a \bullet a = \frac{1}{3}a^2$ este valor se le resta al primer término del dividendo

$\frac{1}{3} a \bullet \left(-\frac{2}{5} b \right) = -\frac{2}{15} ab$ valor que se le resta al segundo término del dividendo

REPASEMOS.....

Para multiplicar fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador

Al realizar la suma de estos términos:

REPASEMOS.....

Para sumar o restar fraccionarios no homogéneos primero se halla el denominador común y luego se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y este resultado se multiplica por su respectivo numerador

$\frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{3} a^2 = 0$

$\frac{7}{10} ab + \frac{2}{15} ab$ Como se trata de fraccionarios no homogéneos, se busca el denominador común, en este caso ese denominador es 30

$\frac{((30 \div 10)\ 7ab + (30 \div 15)\ 2)ab}{30} = \frac{(21 + 4)\ ab}{30} = \frac{25}{30} ab$ **simplificado:**

$\frac{((30 \div 10)\ 7ab + (30 \div 15)\ 2)ab}{30} = \frac{25 \div 5}{30 \div 5} ab = \frac{5}{6} ab$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2 & a - \frac{2}{5}b \\ \hline -\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}ab & \frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b \\ \hline 0 + \frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2 & \\ -\frac{5}{6}ab + \frac{1}{3}b^2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Realizar las siguientes divisiones:

1. $(m^2 - mn) \div (m)$

2. $(4a^8 - 10a^6 - 5a^4) \div (2a^3)$

3. $(x^4 - x^6 - 2x \text{ ñ } 1) \div (x^2 \text{ ñ } x \text{ ñ } 1)$

4. $(3m^3n \text{ ñ } 5mn^3 + 3n^4 - m^4) \div (m^2 \text{ ñ } 2mn + n^2)$

5. $\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{36}xy - \frac{1}{6}y^2\right) \div \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right)$

2.5. PRODUCTOS NOTABLES:

Los productos notables son productos que satisfacen algunas reglas y su resultado puede ser hallado por simple inspección, sin tener que realizar la operación, lo que agiliza cualquier operación.

2.5.1 BINOMIOS:

El binomio es un polinomio que consta de dos términos, como: a + b, x ñ y,

$$\frac{b^3}{5} - \frac{7\,mx^7}{14\,a^2b}$$

Recordando que $a^2 = a \bullet a$ es decir que la base a se repite las veces que indica el exponente, en este caso en 2 veces, entonces:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

☺

el cuadrado de la suma de dos cantidades $(a+b)^2$ es igual al cuadrado del primer término (a^2), más dos veces el primero por el segundo (2ab), más el segundo al cuadrado (b^2)

EJERCICIOS RESUELTOS

Hallar por simple inspección:

1. $(5 + m)^2 = (5)^2 + 2 \bullet 5 \bullet m + (m)^2 =$ **$25+10m+m^2$**

Explicación:

Cuadrado del primer término = $(5)^2 = 5 \bullet 5 = 25$

Dos veces el primero por el segundo = $2 \bullet 5 \bullet m = 10m$

Cuadrado del segundo término = $(m)^2 = m \bullet m = m^2$

2. $(4xy^2 + 3xy^3)^2 = (4xy^2) + 2 \bullet (4xy^2) \bullet (3xy^3) + (3xy^3)^2$

$(4xy^2 + 3xy^3)^2 =$ **$16x^2 y^4 + 24 x^2 y^5 + 9x^2 y^6$**

Explicación:

Cuadrado del primer término $= (4xy^2)^2 = 4^2 x^2 y^{2..2} = 4^2 x^2 y^2 = 16 x^2 y^4$

Dos veces el primero por el segundo $= 2 \bullet (4xy^2) \bullet (3xy^3) = 2 \bullet 4 \bullet 3 \bullet x \bullet x \bullet y^2 y^3 = 24x^2 y^5$

Cuadrado del segundo término = $(3xy^3)^2 = 3^2 x^2 y^{3.2} = 9x^2 y^6$

Cuando se trata del cuadrado de la diferencia de dos cantidades $(a$ ñ $b)^2$, el resultado es el siguiente :

$(a$ ñ $b)^2 = (a$ ñ $b) (a$ ñ $b) = a^2 - 2ab + b^2$

La ˙nica diferencia con el cuadrado de la suma de dos cantidades es el signo del segundo término, que en este caso es negativo (-) entonces:

☺

el cuadrado de la diferencia de dos cantidades $(a$ ñ $b)^2$ es igual al cuadrado del primer término (a^2), **menos** dos veces el primero por el segundo (2ab), más el segundo al cuadrado (b^2)

Hallar por simple inspección:

3. $(x$ ñ $7)^2 = x^2 - 2 \bullet x \bullet 7 + 7^2 =$ **$X^2 - 14x + 49$**

Explicación:

Cuadrado del primer término = $(x)^2 = x \bullet x = x^2$

Dos veces el primero por el segundo = $2 \bullet x \bullet 7 = 14x$

Cuadrado del segundo término = $(7)^2 = 7 \bullet 7 = 49$

4. $(4a \text{ ñ } 3b)^2 = (4a)^2 - 2(4a) \bullet (3b) + (3b)^2 =$ **$16\,a^2 - 24ab + 9b^2$**

Hasta ahora se ha trabajado en cuadro se la suma de dos cantidades

$(a \pm b)^2$, ahora analizaremos el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, entonces:

$$(a + b)^3 = (a + b) \bullet (a + b) \bullet (a + b) = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$$

el cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo del primer término (a^3) más el triplo del cuadrado del primer término multiplicado por el segundo ($3a^2b$), más el triplo del primer término multiplicado por el cuadrado del segundo ($3ab^2$), más el segundo término al cubo (b^3)î

Es importante resaltar que el primer término inicia con el exponente tres (a^3), en el segundo término este término desciende un numero (a^2) y aparece el segundo término (b), en el tercero sigue descendiendo el primer término (a) y el segundo continúa creciendo (b^2) y en el cuarto el primer término del binomio desaparece y el segundo llega hasta (b^3).

5. $(3n + 5m)^3 = (3n)^3 + 3 (3n)^2 \bullet (5m) + 3 (3n) \bullet (5m)^2 + (5m)^3 =$

$(3n + 5m)^3 =$ **$27n^3 + 135n^2m + 225nm^2 + 125m^3$**

Explicación:

Cubo del primer término: $(3n)^3 = 3^3n^3 = 27n^3$

Triplo del cuadrado del primer término por el segundo:

$3(3n)^2 \bullet (5m) = 3 \bullet 3^2 \bullet n^2 \bullet 5m = 135n^2m$

Triplo del primer término por el cuadrado del segundo:

$3(3n) \bullet (5m)^2 = 3 \bullet 3 \bullet n \bullet 5^2 \bullet m^2 = 225nm^2$

Cubo del segundo término = $(5m)^3 = 5^3\ m^3 = 125m^3$

6. $(4a + 3)^3 = (4a)^3 + 3\ (4a)^2\ (3)$ **+** $3\ (4a)\ (3)^{\ 2} + (3)^3 =$

$64a^3 + 144a^2 + 108a + 27$

Explicación:

Cubo del primer término: $(4a)^3 = 4^3\ a^3 = 64a^3$

Triplo del cuadrado del primer término por el segundo:

$3(4a)^2\ (3) = 3 \bullet 4^2 \bullet a^2 \bullet 3 = 144a^2$

Triplo del primer término por el cuadrado del segundo:

$3(4a)\ (3)^2 = 3 \bullet 4 \bullet a \bullet 3^2 = 108a$

Cubo del segundo término = $(3)^3 = 3^3 = 27$

7. $(t$ ñ $4)^3 = t^3$ ñ $3(t^2)\ (4) + 3(t)\ (4^2) - 4^3 =$ **$t^3 - 12t^2 + 48t - 64$**

Explication:

Cubo del primer tÈrmino:t^3

Triplo del cuadrado del primer término por el segundo: $3 \bullet t^2 \bullet 4 = 12t^2$

Triplo del primer término por el cuadrado del segundo: $3 \bullet t \bullet 4^2 = 48t$

Cubo del segundo término = $4^3 = 64$

Se observa que la ˙nica diferencia entre el cubo de la suma de un binomio $(a + b)^3$ y el cubo de la diferencia de un binomio $(a$ ñ $b)^3$ son los signos, porque en la suma todos los términos son positivos, mientras que en la diferencia se combinan, es decir, el primero es positivo, el segundo negativo, el tercero positivo y el ultimo negativo

Matemáticamente, la forma general de un producto notable se puede expresar como:

$(a+b) \bullet (a+b) \bullet \square \bullet (a+b)$ n veces.

El producto de estas bases se puede resumir así: $(a+b)^n \; n \in Z^+$ Esto significa que n puede tomar los valores **: 0, 1 , 2, 3 ....**

La expresión $(a+b)^n$ se ve como un binomio elevado a la n, lo que indica que los productos notables son **BINOMIOS** con exponente n.

Entonces cuando:

- n = 0 (a+b)e = 1 Por definición de potencias
- n = 1 $(a+b)^1 = (a + b)$ Propiedad de la potenciación.
- n = 2 $(a+b)^2 =$ (a+b) • (a+b) = as +ab +ab +bs
- n = 3 (a+b)t = (a+b) • (a+b) • (a+b) = at+3asb+3abs + bt

Pero qué pasa si n tiene valores superiores a estos?

Para dar solución a estos casos se puede acudir a dos métodos: **Binomio de Newton y el Triángulo de Pascal.**

2.5.1.1. BINOMIO DE NEWTON:

BINOMIO DE NEWTON

Dado el binomio $(a+b)^n$

- El número de términos del polinomio es de n+1
- El primer término del polinomio ser· a^n
- El ˙último término del polinomio ser· b^n
- Cuando el binomio tiene signo positivo, todos los términos del polinomio serán positivos.
- Si el signo del binomio es negativo, los signos del polinomio van intercalados, empezando por el signo positivo.

Por ejemplo (a +b)t = at + 3as b+ 3abs +bt

- El número de términos del polinomio ser· igual a n+1 = 3 + 1 = 4
- El primer término del polinomio ser· at
- El ˙último término del polinomio ser· bt

La fórmula general, conocida como la **LEY DEL BINOMIO**, descubierta por Newton es:

(a+b) ^{n} = a ^{n} +na $^{n-1}$ b + $\frac{n(n-1)}{1 \bullet 2}$ a $^{n-2}$ bs + $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \bullet 2 \bullet 3}$ a $^{n-3}$ bt + ... + b ^{n}

(a -b) ^{n} = Igual que el caso anterior, solo que los signos van intercalados, iniciando con positivo.

Ejemplos: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^{4-1}b + \frac{4(4-1)}{1*2} a^{4-2}b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1*2*3} a^{4-3}b^3 + b^4$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a\ b^3 + b^4$$

En el ejemplo podemos observar que a medida que el exponente del primer término va disminuyendo desde el valor de n, el exponente del segundo término del Binomio va aumentando desde cero hasta n.

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^{5-1}y + \frac{5(5-1)}{1*2}x^{5-2}y^2 - \frac{5(5-1)(5-2)}{1*2*3}x^{5-3}y^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1*2*3*4}x^{5-4}y^4 - y^5$$

Desarrollando y simplificando:

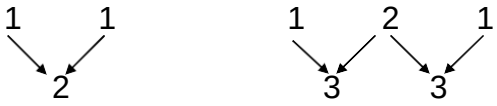
$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

2.5.1.2. TRIANGULO DE PASCAL:

Una forma fácil para obtener **LOS COEFICIENTES** del polinomio, es utilizando el triángulo de pascal. El triángulo se construye de la siguiente manera:

n = 1	1	(a+b)]
n = 1	1 1	(a+b)[1]
n = 2	1 2 1	(a+b)^
n = 3	1 3 3 1	(a+b)_
n = 4	1 4 6 4 1	(a+b)^4
n = 5	1 5 10 10 5 1	(a+b)^5
n = 6	1 6 15 20 15 6 1	(a+b)^6

Los términos del triángulo se obtienen, a partir de la tercera fila, sumando términos de la fila superior inmediata.



Como ejercicio obtenga los términos para n = 7, 8, 9,10

Ejemplos:

⟶ Hallar el polinomio resultante de: $(p-q)^4$ utilizando el triángulo de pascal.

$(p-q)^4$. Los coeficientes para n= 4 son: 1, 4, 6, 4,1 entonces. Los exponentes de p van disminuyendo uno a uno desde 4, mientras que los exponentes de q van aumentando desde cero hasta 4. Como el signo del binomio es negativo, los signos de la respuesta se van alternando.

$(p \text{ ñ } q)^4 = \mathbf{1}\ p^4q^0 - \mathbf{4}ptq^1 + \mathbf{6}psqs - \mathbf{4}p^1qt + \mathbf{1}p^0q^4 =$ **p^4 ñ4prq+6psqs - 4pqr + q^4**

⟹ $(2x + 4)^5$

Los coeficientes para n = 5 son: 1, 5, 10, 10, 5,1

Entonces:

$1(2x)^5\ 4^0 + 5(2x)^4 4^1 + 10(2x)t\ 4s + 10(2x)s4t + 5(2x)^1 4^4 + 1(2x)^0 4^5 =$

$32x^5+320x^4+1280xr +2560xs +2560x +1024$

2.5.1.3. PRODUCTO DE SUMA POR DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES:

(a + b)(a-b) = as – Bo

La suma de dos cantidades (a+b) multiplicada por la diferencia de estas mismas cantidades (a-b), es igual al cuadrado del primer término (a)s menos el cuadrado del segundo término (b)s

EJERCICIOS RESUELTOS

Escribir por simple inspección el resultado de las siguientes expresiones.

8. (2x+1) (2x-1) = (2x)s - (1)s = **4xs - 1**

Explicación:

Cuadrado del primer término: (2x)s = 2s ● xs = 4xs

Cuadrado del segundo término: 1s = 1

9. (6ms - asm) (6ms +asm) = (6ms)s -(asm)s **36m** $^{4} - a^{4}m^{2}$

Explicación:

Cuadrado del primer término = (6ms)s = $6sm^4$ = $36m^4$

Cuadrado del segundo término = (asm)s = $a^{2..2}$ ms = a^4ms

2.5.1.4. PRODUCTO DE DOS BINOMIOS:

Si se tiene:

(x+3)(x+5) = xs + 5x +3x +15 = **XO +8x +15**

Con este ejemplo nos podemos dar cuenta que en lugar de realizar toda la multiplicación se puede obtener el resultado aplicando la siguiente regla:

> Cuando se tiene el producto de dos binomios, de la forma (x+a)(x+b), el resultado es igual al producto del primer término de cada uno de los factores, en este caso **(** (x)(x) = xs**),** más la suma algebraica de los segundos términos de cada uno de los factores (3+5=8), multiplicada por la raíz cuadrada del resultado anterior ($\sqrt{x^2}$ = x), **más** la multiplicación de los segundos términos de los factores ((3)(5) = 15).

AUTOEVALUACION 6: PRODUCTOS NOTABLES

Desarrollar los siguientes binomios por el método de Binomio de Newton.

1. (p ñq)t

2. (a + 3)t

3. $(5x - 3y)^4$

4. $\left[\left[x - 2 \right] - y \right]^3$

Desarrollar las siguientes potencias por el método del triángulo de pascal.

5. (t ñ4)t

6. $(2t + 3s)^4$

7. $((x-1) - (y-2))^3$

8. $(x - 3y)^5$

Resolver los siguientes ejercicios por simple inspección

9. (a+2) (a +7)

10. (m + 8) (m ñ8)

11. (ms + 4) (ms -4)

2.6. COCIENTES NOTABLES:

Al igual que los productos notables, existen cocientes que cumplen reglas fijas y que su resultado puede ser escrito por simple inspección, sin realizar toda la operación.

→ $\frac{a^2-4}{a+2} = a - 2$ porque $(a+2)(a-2) = a^2-4$

Recordando ..

Para probar una división se multiplican el divisor por el cociente y a este producto se le suma el residuo. El resultado de esta operación debe ser igual al dividendo.

De este ejemplo se puede concluir que la diferencia de los cuadrados de dos términos, en este caso (a^2-4), dividida por la suma de las cantidades $(a+2)$ es igual a la diferencia de las cantidades.

$$\frac{x^2 - y^2}{x+y} = x - y$$

En este caso la diferencia de los cuadrados de dos términos dividida por la diferencia de las cantidades es igual a la diferencia de las cantidades.

→ $\frac{25m^2 - 36n^2}{5m - 6n} =$ 5m + 6n

Ahora analizaremos el siguiente ejercicio

→ $\frac{x^5 - y^5}{x-y} = x^4 + xty + xsys + xyt + y^4$

Como se observa, los dos términos del numerador están elevados al exponente 5 y como denominador están las bases de Este numerador.

En este caso el primer término del cociente (o resultado de esta división) es igual al primer término de las bases elevado a un grado menos del que tiene el numerador (x^4), más el mismo termino elevado a un grado menos multiplicado por el segundo término (xty), más el primer término con un grado menos multiplicado por el segundo término aumentado en un grado (xsys), más el primer término elevado al exponente (1) por la segunda base elevado al siguiente grado (xyt), más el segundo término elevado a un grado inferior del dividendo (y^4).

De este ejemplo se puede concluir que:

La diferencia de potencias iguales, ya sean pares o impares se puede dividir por la suma o diferencia de sus bases y el resultado se empieza por un grado menos de las potencias del dividendo, el siguiente término va descendiendo de grado y el segundo término va aumentando hasta completar un grado menos del dividendo.

$$\frac{m^6 - 64}{m+2} = m^5 - (m^4)(2) + (m^3)(2s) - (m^2)(mt) + m \bullet 2^4 - 2^5$$

Organizando = $m^5 - 2m^4 + 4mt - 8ms + 16m - 32$

Es de resaltar que cuando el denominador es una suma, los signos se combinan, es decir el primer término de este resultado es positivo, el segundo negativo, el tercero positivo y así sucesivamente. Cuando el numerador es una diferencia todos los signos del resultado son positivos.

Para el caso de suma de potencias impares se puede proceder de la misma manera que lo planteado anteriormente, porque esta suma es siempre divisible por la suma o diferencias de sus bases.

REPASEMOSÖ

- La **diferencia** de potencias iguales, ya sean **pares** o **impares,** es siempre divisible por la **diferencia** de sus bases $\frac{X^ - Y^}{X - Y}$

Û $\frac{X_ - Y_}{X - Y}$

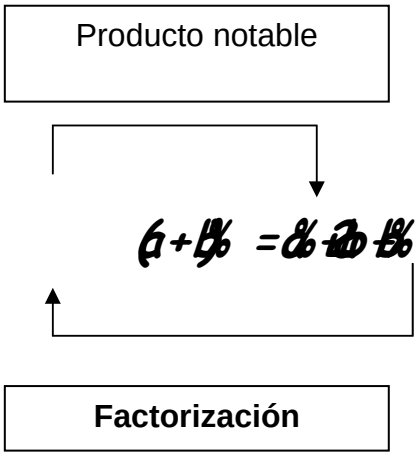
- La **diferencia** de potencias iguales **pares** es siempre divisible por la **suma** de las bases $\frac{X^ - Y^}{X + Y}$
- La **suma** de las potencias iguales i**mpares** es siempre divisible por la **suma** de las bases $\frac{X_ + Y_}{X + Y}$
- La suma de las potencias iguales **pares NUNCA** es divisible por la **suma** ni por la **diferencia** de las bases.

$\frac{X^ + Y^}{X - Y}$ = no es una división exacta

2.7. FACTORIZACION:

Consiste en presentar un polinomio en factores. La Factorización es el paso contrario a los productos notables. Este proceso es muy ˙tal para simplificar fracciones.

Para llevar a cabo una factorización es necesario aprender ciertas reglas, las cuales están relacionadas con los productos notables.



O sea que en la factorización se parte del resultado de un producto notable $(a^2+2ab+b^2)$ para llegar a $(a + b)^2$.

A continuación se relacionan los casos más importantes de factorizaciÛn:2.7.1. FACTOR COMUN:

Sea **XO + 2X**

En esta expresión algebraica se observa que **x** esta· en los dos términos, o sea que es común. Para llevar a cabo una factorización de este tipo, se selecciona el término común con el menor exponente, en este caso **x**, luego este término se coloca como coeficiente de un paréntesis **x ( ).** Dentro del paréntesis se coloca el resultado de dividir cada uno de los términos dados por el factor común, **(xs+ 2x) ˜x = x+2,** entonces la factorización queda:

x(x + 2)

b	también es común y es el de menor exponente

Entonces el factor común es 2a*b*

Los términos que van dentro del paréntesis son:

2a@b ˜ 2ab = a

*3 ●2*abs*˜2ab = 3b*

2. xt +xs +x = x(xs + x +1)

Explicación:

La letra *x* esta· en todos los tres términos y es la de menor exponente entonces este es el factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis son:

xt *˜x = x@*

x@ ˜ x = x

x ˜x = 1

4. 15ct +20cs -5c = 5c(3cs +4c -1)

Explicación:

Descomponiendo los números: 15 = 5 ● 3

20 = 5 ● 2s

5 = 5 ● 1

De lo anterior se observa que el número | 5 | esta· contenido en (15,20 y 5) entonces 5 es un factor común.

Con relación a las letras, la | c | esta· en todos los términos y es la de menor exponente. Entonces el factor común es | 5c |

Los términos que van dentro del paréntesis:

15ct ˜ 5c = 3cs

20cs ˜ 5c = 4c

5c ˜ 5c = 1

5. a^{24} ñ $a^{18} + a^{15} - a^{10} + a^{6} - a^{3} = aE\,(a^{21} - a^{15} + a^{12} - a^{7} + a^{3} - 1)$

Explicación:

La letra *a* esta en todos los términos pero la de menor exponente es *a*t, entonces este es el factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis:

a^{24} ~ $aE = a^{21}$

a^{18} ~ $aE = a^{15}$

a^{15} ~ $aE = a^{12}$

a^{10} ~ $aE = a^{7}$

a^{6} ~ $aE = a^{3}$

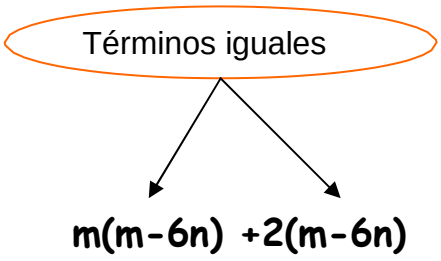
a^{3} ~ $aE = 1$

6. m@ - 6mn +2m -12n

En este caso no hay un término que esté común en todos, porque por ejemplo m está en los tres primeros términos pero no está· en el ˙último, mientras que en esta en el segundo y cuarto, entonces se pueden agrupar en dos paréntesis.

(ms - 6mn) + (2m-12n)

Ahora cada una de estas agrupaciones se factorizan independientemente:



Como se observa, el término (m-6n) esta· en los dos términos, entonces se coloca como factor común y al igual que en los ejemplos anteriores, cada uno de estos términos se divide por el factor común con el fin de hallar los términos que están dentro del paréntesis:

m(m-6n) ~ (m-6n) =m

2(m-6n) ˜ (m-6n) =2

Entonces la factorización queda: (m-6n) (m+2)

7. *a + a@ -ab@ -b@*

Es de aclarar que la agrupación se puede hacer de diferentes maneras, por ejemplo:

(*a ñ b@) + (a@ -ab@)*

Ahora se factorizan cada uno de estos términos en forma independiente:

El primer término (a ñ bs) no tiene ningún término común, entonces se deja igual.

El segundo término (*a@ -ab* ^{2} *)* tiene como factor común *a,* entonces esta factorización queda *a(a ñ b@)*

(a ñ b@) + a(a ñb@).

La expresión (a - b ^{2}) esta· en los dos términos o sea que es el factor común y los términos que van dentro el paréntesis son:

(*a ñb@) ˜(a ñ b@) = 1*

a (a - b ^{2} *) ÷ (a - b* ^{2} *) = a*

Entonces la factorización completa queda *(a ñ b@) (1+ a)*

8. x + ys - 2mx -2mys

Agrupando:

(x + ys) ñ (2mx +2mys)

Recordando que para la eliminación de un paréntesis, si esta· precedido por el signo negativo (-), todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

En este caso, al agrupar el segundo término este queda precedido por el signo negativo, entonces se le hizo el cambio de signos a todo lo que estaba dentro del paréntesis, por eso -2mx queda convertido en 2mx y -2mys se convierte en +2mys

Ahora se factorizan independientemente cada uno.
(x + ys) ñ 2m(x +ys)
El factor (x + ys) esta· común en los dos términos, entonces es el común.

Los términos que van dentro del paréntesis son:

(x + ys) ˜ (x + ys) = 1
2m(x + ys) ˜(x + ys) = 2m

Entonces la factorización queda:
(x + y ^{2}) (1 ñ 2m)

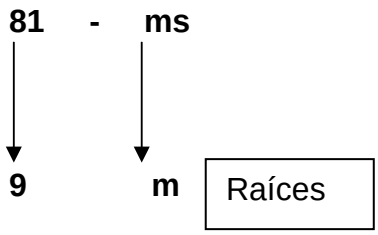
2.7.2 DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Los procesos para esta factorización consisten en extraerle la raíz cuadrada a cada uno de los términos de la diferencia de cuadrados (*a² - b²),* o sea que las raíces son: (*a y b),* y la suma de estas raíces (a + b) se multiplica por la diferencia de las raíces (a -b)

EJERCICIOS RESUELTOS

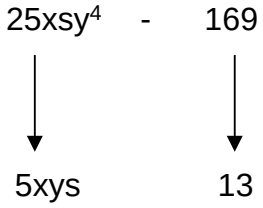
9. Factorizar: 81 ñ ms



Luego la suma de estas raíces se multiplica por la diferencia de las raíces.

(9 + m) (9 ñ m)

10. $25xsy^4 - 169$



Entonces el resultado de esta factorización es: (5xys + 13) (5xys - 13)

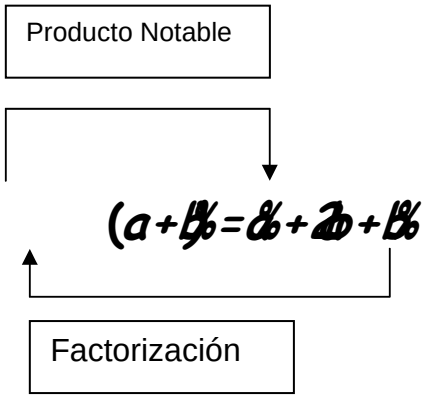
2. 7. 3 TRINOMIOS:

El trinomio es un polinomio que consta de tres términos, como: a + b + c, $x^2 - 5x + 6$. Cuando se tiene un trinomio, lo primero que se verifica es si tiene un factor común y si lo tiene se realiza de la misma manera que se trabaja

anteriormente, pero si no tiene ningún factor común, se puede llevar a cabo el siguiente proceso:

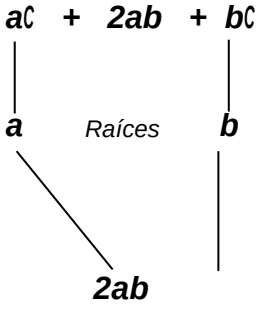
2.7.3.1. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:

Recordando los productos notables:



En el trinomio cuadrado perfecto se parte de $a^2 + 2ab + b^2$ para llegar a $(a + b)^2$

La forma de establecer si se trata de un trinomio cuadrado perfecto es:



Primero se ordena con relación a una letra, luego se sacan las raíces cuadradas de los extremos (es decir de los términos que están al cuadrado), en este caso las raíces son a y b, luego estas raíces se multiplican por el número 2 y si el producto de esta operación es igual al del segundo término del trinomio, se

Duplo del producto de las raíces

$a^6 + 2a^3b^2 + b^4 = (a^3 + b^2)^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

11. Factorizar:

$b^4 + 1 + 2b^2$

Primero se ordenan con relación a la letra b, quedando:

$b^4 + 2b^2 + 1$

Ahora se sacan las raíces de los extremos, estas son (b^2 y 1)

Luego se halla el duplo de la multiplicación de estas dos raíces:

2 ●bs ● 1 = 2bs Este producto es igual al segundo término del trinomio, con esto se comprueba que es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es igual a la suma de las raíces elevadas al cuadrado. **$(b^2 + 1)^2$**

12. Factorizar xs - 12x + 36

Ya está· ordenado, ahora se verifica si es un trinomio cuadrado perfecto. Se hallan las raíces de los extremos, en este caso son (x y 6) y el producto de estas raíces se multiplica por dos (2) x ● 6 ●2 = 12x, este ˙último valor se compara con el segundo término del trinomio y se verifica que es igual. Sin embargo, el signo de este segundo término es negativo, razón por la cual la factorización queda como la diferencia de las raíces elevada al cuadrado.

$(x - 6)^2$

13. Factorizar $\frac{1}{25} + \frac{25a^4}{36} - \frac{a^2}{3}$

Ordenando queda:

$$\frac{1}{25} - \frac{a^2}{3} + \frac{25a^4}{36}$$

Las raíces de los extremos son: $\left(\frac{1}{5} \quad y \frac{5a}{6}\right)$

Ahora el producto de estas dos raíces se multiplica por dos (2) $\frac{1}{5} \bullet \frac{5a}{6} \bullet 2 =$

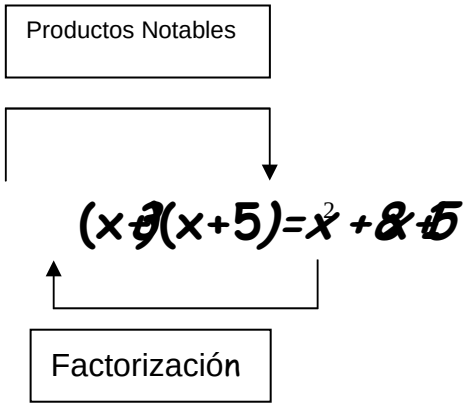
$= \frac{1}{5} \bullet \frac{5a}{6} \bullet \frac{2}{1} = \frac{10a}{30} = \frac{a}{3}$ este valor se compara con el segundo

término del trinomio y se verifica que es igual, razón por la cual la factorización es la diferencia de las raíces elevadas al cuadrado (diferencia porque el segundo término del trinomio tiene signo negativo (-).

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{5a}{6}\right)^2$$

2.7.3.2. TRINOMIO DE LA FORMA xs + bx +c :

Recordando:



Si se va a factorizar la expresión **xs + 8x + 15** se procede de la siguiente manera:

xs + 8x + 15

x No tiene raíz exacta

Una vez ordenado el trinomio, se analiza si se trata de un trinomio cuadrado perfecto, en este caso, la raíz del primer término es (x) y la raíz del ˙último término (15) no tiene raíz exacta, entonces no se trata de un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se realiza lo siguiente:

En dos factores se coloca la raíz del primer término (x) (x), luego se halla un par de números que multiplicados den el valor del ˙último término del trinomio, en este caso 15 y sumados algebraicamente tengan un valor igual al coeficiente del segundo término del trinomio (8).

Los pares de números que multiplicados de +15 son: (5 ●3); (-5 ●-3); (15 ●1); (-15 ● -1). Ahora de estas parejas se selección la pareja que al sumarse de 8. Esta pareja es (5 ●3). Con este par de números se completan los dos factores que inicialmente se habían construido (x+5) (x+3)

EJERCICIOS RESUELTOS

14. Factorizar: ms + 5m + 6

ms +5m + 6 = (m + 3) (m +2)

Explicación:

El trinomio este· ordenado. No se trata de un trinomio cuadrado perfecto, porque el ˙último término (6) no tiene raíz exacta, entonces la raíz del primer término (m) se coloca en dos factores, luego se halla un par de números que multiplicados den (+6) (˙último término del trinomio) y sumados

algebraicamente

den (+5) (coeficiente del segundo término del trinomio). Esta pareja de números es (3 y 2), porque 3 ● 2 = 6 y 3 + 2 = 5 Esta pareja de números (6 , 2) se reparten en los factores antes relacionados.

15. Factorizar: *b² - 9b +20*

b² - 9b + 20 = (b -5) (b -4)

Explicación:
No se trata de un trinomio cuadrado perfecto porque el primer término si tiene raíz exacta (b) pero el ˙último término del trinomio (20) no tiene raíz exacta. Entonces la raíz del primer término se reparte en dos factores (b) (b), luego se busca una pareja de números que multiplicados den +20 (˙último término del trinomio) y sumados den +9 (coeficiente del segundo término del trinomio).

Las parejas que al multiplicarlas dan +20 son: (5 ●4); (-5 ●-4); (2 ●10);
(-2 ● -10); (20 ● 1); (-20 ●-1)

De estas parejas se selecciona aquella donde la suma de un valor de (-9).
Esta pareja es (-5 ● -4) porque -5 ●-4 = 20 y -5 -4 = -9

Esta pareja de números se reparte en los dos factores (b *-4) (b -5)*

16. -2x -35 +xs

Ordenando:
xs -2x -35 = (x -7) (x +5)

Explicación:
La raíz del primer término es x, el cual se distribuye en cada uno de los paréntesis (x) (x).
Las parejas que multiplicadas dan el tercer término (-35) son:
(7 ● -5); (-7 ● 5); (35 ● **-**1); (-35 ● 1);
De estas parejas se selecciona aquella cuya suma algebraica es igual al coeficiente del segundo término (-2)
Entonces la pareja es (-7 ● 5), esta pareja se distribuye en los paréntesis inicialmente planteados (x ñ 7) (x + 5)
17. a^4 ñ 60 ñ 11as

Ordenando

a^4 -11as -60 = (as +4) (as -15)

Explicación
La raíz del primer término (a^4) es así, la cual se reparte en los dos paréntesis (as) (as).

Las parejas que multiplicadas dan (-60) son: (-2 ● 30);(-4 ● 15);(-10 ● 6);(-60 ●1);(-20 ●**3**); (-5 ● **-**12); (2 ●-30); (4 ●-15); (10 ●**-**6); (20 ●-3); (5 ●12)

De estas parejas se selecciona aquella cuya suma algebraica es igual a (-11). Esta pareja es (4 ● -15). Esta pareja se distribuye en los paréntesis antes relacionados.

2.7.3.3. TRINOMIO DE LA FORMA axs + bx +c:

La ˙nica diferencia que hay en este caso y el anterior, es en los coeficientes del primer término del trinomio, mientras que en caso anterior era uno (1), ahora es un número diferente a uno (1).

Por ejemplo:

5ms +13m-6

En este caso el coeficiente es 5, entonces este número no tendría raíz exacta, por lo tanto se recurre al a siguiente estrategia:

Se multiplican todos los términos del trinomio por el coeficiente del primer terminaux:

(5) ● 5ms + 13(5)m - 6 ● (5)

25 ms + 13 (5)m -30

El proceso siguiente es similar al anterior caso, donde se plantea que la raíz del primer término, en este caso de (25ms) es (5m), esta raíz se distribuye en dos paréntesis (5m) (5m)

Ahora se busca la pareja de números multiplicados den (-30) y sumados algebraicamente den (**+13**) (es de aclarar que en el segundo término se tiene en cuenta el valor original, es decir no se multiplica por (5) sino que se deja planteado para no confundirnos).

Las parejas que multiplicadas dan (-30) son:

(-2 ● 15); (-6 ● 5); (-10 ● -3); (-30 ● 1); (2 ● **-**15); (6 ● -5); (10 ● **-3**); (30 ●-1)

De estas parejas se selecciona la que sumada algebraicamente de 13 es (-2 ●15), entonces con esta pareja se completa los paréntesis relacionados anteriormente, quedando así: (5 m -2) (5m + 15)

Pero como se había multiplicado el trinomio por (5), ahora se tiene que dividir por el mismo número, para no cambiar la expresión. $\frac{(5m-2)(5m+15)}{5}$

Para facilitar esta división se puede factorizar el denominador, de tal manera que divida exactamente a los factores del numerador.

Entonces 5 se puede factorizar en 5 ● 1 y el factor (5m ñ 2) se divide por (1) y el otro factor (5m +15) por (5)

$\frac{(5m-2)(5m+15)}{5 \quad 1}$ = (5m -2) (m +3)

Entonces el resultado de factorizar $5m^2$ + 13m ñ 6 = (5m- 2) (m + 3)

EJERCICIOS RESUELTOS

18. 12as +7a -10

Se multiplica todos los términos del trinomio por el coeficiente del primer término (12), recordando que en el segundo término, no se efectúa la multiplicación, sino que se deja planteada.

144a@ + 7(12)a ñ 120

La raíz del primer término se distribuye en los dos paréntesis (12a) (12a)
Ahora se busca la pareja de números que al multiplicarlos den (-120) y que sumados den (7).

Las diferentes parejas que multiplicadas dan (-120) son:
(-2 ●60); (-4 ●30); (-8 ●15); (-24 ●5); (-10 ●12); (-20 ●6); (-40 ●3); (-120 ●1);
(2 ● -60); (4 ● -30); (8 ●-15); (24 ●-5); (10 ●-12); (20 ●-6); (40 ●-3) (120 ●-1)
De estas parejas se selecciona (-8 ●15) porque al sumar estos términos da (7)

Ahora se completan los factores inicialmente planteados con esta pareja
(12a ñ 8)(12a +15)
Pero como se había multiplicado el trinomio por (12), ahora se procede a dividir los anteriores factores por este número. Este número puede colocarse en factores, tratando que cada uno de los factores del numerador sea divisible por

los factores del denominador. En este caso los factores pueden ser 4 ● 3 porque (12a -8) es divisible por 4, mientras que (12a + 15) es divisible por 3

$$\frac{(12a-8)(12a+15)}{4 \bullet 3} = (3a - 2)(4a + 5)$$

Entonces el resultado de factorizar 12as + 7a - 10 = (3a -2) (4a + 5)

19. 35xs - 24x + 4

Se multiplican todos los términos del trinomio por 35 que es el coeficiente del primer término

35 ●35xs - 24(35)x + 4 ●35

1225xs - 24(35)x +140

La raíz del primer término es 35x, la cual se reparte en los dos paréntesis

(35x) (35x)

Las parejas de números que multiplicadas dan 140 son:

(2 ●**7**0); (-2 ●**7**0); (4 ●35); (-4 ●**-3**5); (-14 ● **-**10); (14 ●10); (28 ●5); (-28 ●**-**5); (140 ●1);

De esta pareja la que sumada algebraicamente da -24 es (-14 ● -10)

Esta pareja se reparte en los paréntesis inicialmente planteados

(35x ñ 14)(35x -10)

Ahora estos factores se dividen por 35 que podría ser 7 ●5

$$\frac{(35x \text{ ñ } 14)(35x - 10)}{7 \bullet 5} = (5x \text{ ñ } 2)(7x - 2)$$

Entonces la factorización de $35x^2 - 24x + 4 = (5x-2)(7x-2)$

AUTOEVALUACION 7: FACTORIZACI"N

Factorice hasta donde sea posible:

1. cs - 25

2. *2aE + 8a*
3. *3mE - 6m@ + 15m*
4. *x@ + 49*

5. *27 ñxEyE*

6. *4b@ - 4b - 24*

7. *yE - 2y@ + y -2*

8. *a@b@ - 16*

9. *m@ - 4m + 3*

10. *18aE -8a*

2.8. MAXIMO COMUN DIVISOR:

Cuando se analiza el **común divisor** en los números racionales, veíamos que este era aquel que podía ser dividido exactamente por los números de los denominadores de las fracciones.

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ 15

Por ejemplo: el común denominador es , ya que este número puede ser dividido por 3 y por 5 .Este principio también se cumple

para expresiones algebraicas.

El **Factor Común o Divisor Común** de dos o más expresiones algebraicas, es una expresión que puede dividir en forma exacta a las expresiones dadas.

Sean las expresiones: $10a^4bt$, $5asb^4$, 20ab.

El divisor común es la expresión: 5ab, ya que las expresiones $10a^4bt$, $5asb^4$, 20ab se pueden dividir exactamente por 5ab:

$10\,a^4bt \tilde{} 5ab = 2atbs$

$5\ asb^4 \tilde{}\ 5ab = abt$

$20ab \tilde{} 5ab = 4$

2.8.1. MAXIMO COMUN DIVISOR DE MONOMIOS (M C D):

Para obtener el **M C D** de monomios, primero se determina el común divisor de los coeficientes, luego se identifican las bases comunes; seleccionando las de menor exponente.

> Recordar que uno (1) es el mínimo común denominador de cualquier expresión.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el M C D de las siguientes expresiones: $25x^4y$, $20x^2y^3$, $15xa^3$

El M C D es: 5x . Porque el común divisor de los coeficientes 25, 20, 15 es 5 y la única base común (que está presente en todos los términos) es x y esta es la de menor exponente.

2. Cual ser· el M C D de: $12a^4b^3$, $15b^2c^4$, $20a^3b^4c^2$

Al descomponer estos tres coeficientes:

12 = 4 ●3

15 = 5 ●3

20 = 4 ●5

Se observa que no hay un factor común.

Con relación a las bases se observa que b esta· común en los tres términos, pero la de menor exponente es bs, entonces el divisor común es bs.

2.8.2. MAXIMO COMUN DIVISOR DE POLINOMIOS:

Para hallar el MCD de polinomios, hay dos caminos:

⟶ Primero: factorizando los polinomios para obtener factores.

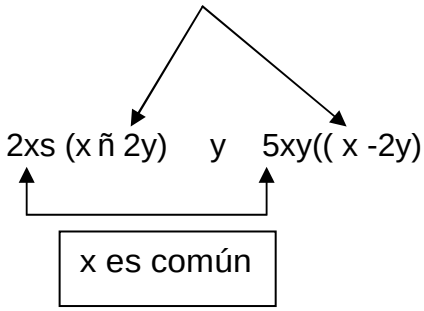
⟶ Segundo: por divisiones sucesivas.

Para obtener el MCD por factorización, primero se descomponen los polinomios en sus factores primos, el MCD ser· el producto de los factores comunes con su menor exponente.

⟹ Hallar el MCD de: 2xt +4xs y y 5xsy -10xys

Factorizamos cada uno de estos términos: 2xs (x ñ 2y) y 5xy (x-2y)

El MCD es: x(x - 2y) porque: Comunes



x esta· en los dos términos y es la de menor exponente
(x ñ 2y) esta· presente en los dos términos.

⟹ Hallar el MCD de: $2x^2 + 2x$ ñ 4, 2xs - 8x + 6, 2xt - 2

Factorizando: 2xs + 2x ñ 4 $= \frac{(2x)^2 + 2(2x) - 8}{2}$

$= \frac{(2x + 4) + (2x - 2)}{2} =$ **(x + 2)(2x ñ 2)**

2xs -8x + 6 = $\frac{(2x)^2 - 8(2x) + 12}{2} = \frac{(2x - 6) + (2x - 2)}{2} =$ **(x - 3)(2x ñ 2)**

2xt - 2 = 2(xt - 1) = 2(x ñ 1) (xs + x + 1) = **(2x ñ 2)(x^2 + x + 1)**

Ahora se buscan los factores comunes con el menor exponente, este es:
(2xñ 2)
Entonces el MCD es : **(2x ñ 2)**

- Cuando los polinomios **NO se pueden factorizar,** el MCD se calcula por medio de divisiones sucesivas. En este caso se ordenan los polinomios respecto a la misma letra y se divide el polinomio de mayor grado en el de menor grado. Cuando los dos tienen el mismo grado, cualquiera puede ser el dividendo. Si la división es exacta, el divisor será el M C D, pero cuando la división no es exacta, se divide el primer divisor por el primer residuo, luego por el segundo residuo y así sucesivamente, hasta que la división sea exacta.

⟹ Ejemplo: Hallar el MCD de los polinomios: 12ys + 8y + 1 y 2ys - 5y ñ 3

Se hace la primera división:

12ys + 8 y + 1 ˜ 2ys - 5y ñ 3 = 6 porque al dividir el primer término del dividendo por el divisor se obtiene:

12ys + 8y + 1	2ys - 5y - 3
-12ys+30y +18	6
0 +38y+19	

y el residuo es 38y + 19

Ahora: el de mayor grado es el divisor, entonces se divide este término por el residuo que es de menor valor.

2ys -5y -3	38y + 19
-2ys - y	(2/38)y
0 -6y -3	

El nuevo residuo es -6y ñ 3 se simplifica dividiendo todo el término por (-3),

Entonces queda (-6y ñ 3) ÷ (-3) = 2y + 1

Nuevamente el divisor se divide por el residuo

38y + 19	-6y - 3
- 38y - 19	$-(\frac{38}{6})$
0 0	

El residuo es cero (0)

Entonces el MCD ser·: 2y + 1

2.9. MINIMO COMUN MULTIPLO:

Para hablar el Mínimo Común Múltiplo, es pertinente analizar de los Múltiplos Comunes, los cuales son cantidades que pueden ser divisibles por las cantidades dadas. Por ejemplo si tenemos las cantidades 3, 6, 9 , estos números tendrán como Múltiplos comunes: 9, 18, 27 como se observa, hay gran cantidad de múltiplos comunes, pero para un estudio matemático, lo que se requiere es el **Mínimo,** para lo cual le hace el análisis pertinente.

El Mínimo Común Múltiplo MCM, de dos o más expresiones algebraicas, es una expresión que puede ser divisible exactamente por las expresiones dadas. EL MCM contiene el menor coeficiente numérico y la base con el menor grado de todos los múltiplos que posee las expresiones dadas.

2.9.1. MINIMO COMUN MULTIPLO DE MONOMIOS:

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo de monomios, primero se descomponen los términos en factores primos. Luego se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, el producto de estos ser· el M C M.

Ejemplo: Hallar el MCM de las siguientes expresiones 2x, 6xs y, 12yt
Descomponiendo los coeficientes en factores primos:
2 = 2●1
6 = 2 ●3
12= 2s ●3

Entonces las expresiones quedan 2x, 2 ● 3xsy, 2s ●3yt
Ahora se toman los factores comunes y no comunes con el **mayor exponente** de cada uno de estos términos:
2s ●3xs yt = 12x^ y_

Entonces el MCM es

Ejemplo: Cual es el MCM de: $5a^4b,\ 10b^2c,\ 20a^3c^3$

Descomponiendo los coeficientes en factores primos:

5 = 5 •1
10 = 5 •2
20 = 5 •2s

Las expresiones quedan:
$5a^4b,\ 5 \bullet 2btc,\ 5 \bullet 2^2a^3c^3$

El Mínimo Común Múltiplo es: $5 \bullet 2^2 a^4 b^3 c^2$

Entonces el MCM es: $20a^4b^3c^2$

2.9.2. MINIMO COMUN MULTIPLO DE POLINOMIOS:

Para conocer el MCM de polinomios, la regla es similar que lo hecho para monomios. Es necesario resaltar la importancia que tiene el hecho de dominar los casos de factorización, ya que es la herramienta fundamental para resolver problemas de mínimo común múltiplo.

Ejemplo Hallar el MCM de los siguientes polinomios 3ax ñ 6a, bxs -4bx +4b
Factorizando los polinomios por separado:

3ax ñ 6a = $3a(x-2)$

bxs - 4bx + 4b = b(xs - 4x + 4) pero como (xs - 4x + 4) es un trinomio cuadrado perfecto, la factorización completa queda: b(x ñ 2)

Ahora se seleccionan los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

3*ab(x ñ 2)*

Entonces el MCM de las expresiones es: 3ab(x ñ 2)

Ejemplo: Determinar el MCM de 5*a* - 40, $a^2 - 4$

Factorizando cada uno de estos términos:

5a - 40 = 5(a - 8) pero como la factorización de *(a -8) es* (*a - 2)(a* ^{2} *+2a +4),* la factorización completa es: 5(a ñ 2)(a + 2a + 4)

a - 4 = (a ñ 2)(a + 2)

Los factores comunes y no comunes con su mayor exponente son:

5(*a ñ 2) (a + 2a + 4) (a +2)*

Entonces el MCM de las expresiones es: 5(a ñ 2)(a + 2a + 4)(a + 2)

Recordar que el MCM es una expresión que divide exactamente a cada una de las expresiones dadas.

AUTOEVALUACION 8: MAXIMO COMUN DIVISOR Y MINIMO COMUN MULTIPLO

Hallar el MCD de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3a^2x,\ 7ax^2,\ 12b^2x^2$
2. $16a^2b,\ 20bc^2,\ 30x^2y^2$
3. $24pq^2,\ 16p^2,\ 28p^4q^2,\ 40qxp$
4. $x^2+27,\ 2x^2-2x-24,\ x^4+x^2-6x^2$
5. $3p^2-6p,\ 3p^2-6p^2,\ p^2q-2pq,\ p^2-p^2-2p$
6. $2x^2+4x^2-4x+6,\ x^2+x^2-x+2$

Hallar el MCM de las siguientes expresiones algebraicas:

7. $12xt,\ 18xys,\ 30yt$
8. $5a^2,\ 7ab^2,\ 9ax^2,\ 10b^2x^2$
9. $x^2+2x,\ x^2-2x^2,\ x^2-4$
10. $(a-2)^2,\ a^2-4,\ (a\ \tilde{n}\ 2)^2$
11. $x^2-9x+5x^2-45,\quad x^4+2x^2-15x^2$

2.10. FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Las fracciones algebraicas son expresiones donde el numerador y el denominador son monomios o polinomios, aclarando que el denominador debe ser diferente de cero. La expresión puede ser: **entera** cuando el denominador tiene solo valores numéricos, **mixta** si consta de una parte entera y una parte fraccionaria y **racional** si el denominador tiene parte literal.

Entera: $\frac{a+b}{2}$

Mixta: $x+\frac{3+y}{x}$

Racional: $\frac{3x^2y}{y}$ $x-$

Hay algunos aspectos de las fracciones que son importantes resaltar:

→ Una Fracción es positiva, si tanto el numerador como denominador tiene el mismo signo. $\frac{a}{b}, \frac{-a}{-b}$

→ Una fracción es negativa, si el numerador y denominador tienen signos distintos. $\frac{-a}{b}, \frac{a}{-b}$

→ Cuando el numerador y denominador de una facción se multiplica o divide por la misma cantidad, la fracción **NO** se altera.

2.10.1. REDUCCION DE FRACCIONES:

Reducir una fracción, es llevarla a una fracción irreductible sin que su valor cambie; es decir, no hay más factores que sean divisibles entre sí, por lo tanto una fracción irreductible, no se puede simplificar más.

2.10.2. FRACCIONES CON MONOMIOS:

Para simplificar fracciones cuyos términos son monomios, se divide el numerador y denominador por los factores comunes, hasta obtener una fracción irreducible.

Ejemplo:

Simplificar

Para hallar el factor común de los dos términos (numerador y denominador) es necesario descomponerlos:

=

Entonces los términos comunes con su menor exponente son: 2abs
Ahora cada uno de los términos (numerador y denominador) se simplifica, es decir se divide por el factor común:

Ejemplo:

= Esta fracción es irreducible.

b

Ejemplo: simplificar: $\frac{15x^4y\_z\hat{}}{}$

Descomponiendo los dos términos:

$\frac{15x^4y\_z\hat{}}{} = \frac{5\ .\ 3x^4y\_z\hat{}}{2 \bullet}$

Los factores comunes con su menor exponente son: 3yszs
Ahora cada uno de los términos se divide por el factor común:

$\frac{15x^4y\_z\hat{} \;/\; 3y\hat{}z\hat{}}{}$ $\boxed{\frac{5x^4y}{4z}}$ Fracción irreducible.

FRACCIONES CON POLINOMIOS:

Para simplificar fracciones cuyos términos son polinomios, se descompone en factores primos cada polinomio y se simplifican aquellos que son comunes.

Ejemplo:

Simplificar: $\frac{6x\_}{12x^4 \tilde{n}\ 6x\hat{}y}$

Para simplificar es necesario factorizar los términos que se puedan, en este caso el denominador. Entonces esta fracción queda:

$\frac{\quad}{\quad} \cdot = \frac{\quad}{\quad} \cdot$ simplificando queda: $\boxed{\frac{x}{2x\hat{} - y} \cdot}$

Ejemplo:

Simplificar: $\frac{a-b}{\quad}\ a+$

Aquí se factorizan los dos términos de la fracción

$\frac{a-b}{\quad} = \frac{(\quad)\cdot}{\quad}$ simplificando queda $\boxed{\frac{a-b}{a+b}}$

2.11. OPERACIONES CON FRACCIONES:

La parte que a continuación vamos a estudiar son las operaciones con fracciones, para esto es conveniente recordar los aspectos estudiados con números racionales y especialmente números fraccionarios, ya que las operaciones con fracciones siguen las mismas reglas aritméticas que Estos números.

2.11.1. SUMA DE FRACCIONES:

Para sumar fracciones, primero se debe simplificar aquellos que se puedan reducir, luego se busca el común denominador, para luego realizar las operaciones que permitan terminar la operación.
En el caso de monomios, se busca el MCM de los denominadores, luego Este se divide por cada denominador, cada resultado se multiplica por su correspondiente numerador, finalmente se hace la suma, siguiendo los principios estudiados para la suma de polinomios.

Ejemplo:

Realizar la siguiente operación: $\frac{x \tilde{n} 2}{6} + \frac{3x + 2}{3}$

El MCM es: 6 Este número se deja como denominador de común y para hallar los numeradores, el denominador común (6) se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y el resultado se multiplica por sus respectivos numeradores:

$$\frac{x \tilde{n} 2}{6} + \frac{3x + 2}{3} = \frac{(6 \tilde{} 6)(x-2) + (6 \tilde{} 3)(3x+2)}{6} = \frac{(x-2) + (6x+4)}{6} = \frac{x-2 + 6x+4}{6} = \boxed{\frac{7x + 2}{6}}$$

Ejemplo:

Operar: $\frac{x - 2}{4ab} + \frac{2x - 3}{12ab}$

Recordando que para hallar el denominador común se seleccionan los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, entonces se descomponen para facilitar el proceso:

$$\frac{x - 2}{4ab} + \frac{2x - 3}{12ab} = \frac{x - 2}{2^{\wedge}ab} + \frac{2x - 3}{2^{\wedge} \bullet 3ab}$$

Entonces el denominador común de estas dos fracciones es: $2^2 \bullet 3a@b@ = 12a@b@$

Ahora para hallar los términos del numerador, se divide este denominador común por cada uno de los denominadores de las fracciones y se multiplica por sus respectivos numeradores:

$$\frac{x - 2}{4ab} + \frac{2x - 3}{12ab} = \frac{(12ab \quad \quad)}{12ab} =$$

$$\frac{(3b)(x - 2) + (a)(2x - 3)}{12ab} =$$

$$\frac{(3bx - 6) + (2ax - 3a)}{12ab} = \boxed{\frac{3bx - 6b + 2ax - 3a}{12ab}}$$

Cuando los denominadores son polinomios, Estos se factorizan y se busca el común denominador, el procedimiento es similar al caso anterior.

Ejemplo:

Operar: $\frac{2}{3x + 3} + \frac{4}{2x - 2}$

Antes de iniciar la operación es importante verificar si las fracciones se pueden simplificar, en este caso, la segunda fracción se puede simplificar:

$$\frac{4}{2x - 2} = \frac{4}{2(x - 1)} = \frac{2}{x - 1}$$

Entonces las fracciones quedan:

$$\frac{2}{3x + 3} + \frac{2}{x - 1}$$

Ahora si se procede a hallar el denominador común, pero para esto es necesario factorizar los denominadores. En este caso el denominador del primer fraccionario es el ˙Nico que se puede factorizar, entonces:

$$\frac{2}{3x + 3} + \frac{2}{x - 1} = \frac{2}{3(x + 1)} + \frac{2}{x - 1}$$

El denominador común de estas dos fracciones es: 3(x + 1)(x ñ 1). Ahora se procede de la forma anterior, este denominador se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y luego se multiplica por su respectivo numerador:

$$\frac{3(x+1)(x-1) \sim 3(x+1) \cdot 2 + 3(x+1)(x-1) \sim (x-1) \cdot 2}{3(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1) \cdot 2 + 3(x+1) \cdot 2}{3(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{2x - 2 + 6x + 6}{3(x + 1)(x - 1)} = \boxed{\frac{8x + 4}{3(x + 1)(x - 1)}}$$

Ejemplo:

Operar: $\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2x}{x^2 - x - 2}$

Factorizando los denominadores, para el primero diferencia de cuadrados y para el segundo trinomio de la forma xs +bx + c

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{2x}{x^2-x-2}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}+\frac{\square 2x}{(x-2)(x+1)}$$

El factor común es: (x + 2) (x ñ 2) (x + 1) Entonces:

$$\frac{(x+2)(x-2)(x+1)\ \tilde{}\ (x+2)(x-2)\}(x)+\{(x+2)(x-2)(x+1)\ \tilde{}\ (x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)\}(2x)}{((x+2)(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x)+(x+2)(2x)}{(x+2)(x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)}=\frac{x\hat{}+x+2x\hat{}+4x}{(x+2)(x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)}=\frac{3x^2+5x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

2.11.2. RESTA DE FRACCIONES:

Para restar fracciones, el procedimiento es similar al de la suma, solo que el signo de la operación es negativo lo cual se debe operar con cuidado en la destrucción de paréntesis, recordando que cuando un paréntesis esta· precedido por el signo (-) todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

Ejemplo

Operar: $\frac{x}{x\hat{}-4}-\frac{2x}{x\hat{}-x-2}$

Las operaciones son las mismas que en la suma, pero el signo afecta la segunda parte del proceso.

$$\frac{x}{x\hat{}-4}-\frac{2x}{x\hat{}-x-2}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2x}{(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x+1)\ \tilde{}\ (x+2)(x-2)\}(x)-\{(x+2)(x-2)(x+1)\ \tilde{}\ (x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)(2x)\}}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x)-(x+2)(2x)}{(x+2)(x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)}=\frac{(x\hat{}+x)\ \tilde{n}\ (2x\hat{}+4x)}{(x+2)(x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)}=\frac{x\hat{}+x-2x\hat{}-4x}{(x+2)(x\ \tilde{n}\ 2)(x+1)}=$$

$$\frac{-x\hat{}-3x}{}$$

(x +2) (x ñ 2) (x + 1)

Otra forma de presentar esta fracción es colocándole el signo a toda la fracción, por lo tanto los signos del numerador quedan positivos.

$$-\frac{x^{\wedge} + 3x}{(x+2)(x \tilde{n} 2)(x+1)}$$

2.11.3. MULTIPLICACION DE FRACCIONES:

La multiplicación de fracciones es similar a la multiplicación de números fraccionarios, numerador por numerador y denominador por denominador. La fracción obtenida se debe simplificar si es posible.

Ejemplo

Operar: $\frac{3x^{\wedge}}{2y^{\wedge}} \bullet \frac{5xy}{10y^{\wedge}z}$

Se realiza la multiplicación numerador por numerador y denominador por denominador:

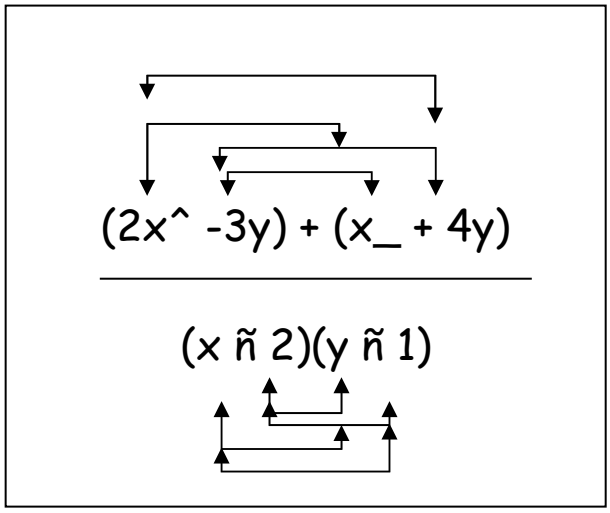
$\frac{3x^{\wedge}}{2y^{\wedge}} \bullet \frac{5xy}{10y^{\wedge}z} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x^{\wedge} \cdot x \cdot y}{2 \cdot 10 \cdot y^{\wedge} \cdot y^{\wedge} \cdot z}$ simplificando: $\frac{3x}{4y\_z}$ Quedo en la fracción irreducible.

Ejemplo:

Operar: $\frac{2x^{\wedge}-3y}{x-2} \bullet \frac{x\_+4}{y-1}$

La operación se realiza multiplicando los numeradores, como se hace para polinomio, igual los denominadores.

Recordando la multiplicación de polinomios:



$$\frac{2x^{\wedge}-3y}{x-2} \bullet \frac{x\_+4}{y-1} = \frac{(2x^{\wedge}-3y)(x\_+4)}{(x\ \tilde{n}\ 2)(y-1)} = \boxed{\frac{2x^5+8x^{\wedge}-3x\_y-12y}{xy\ \tilde{n}\ x-2y+2}}$$

La fracción resultante no se puede simplificar.

Ejemplo.

Operar: $\left(y - \frac{5x}{2}\right) \bullet \left(2 + \frac{y-1}{x}\right)$

Como observamos son fracciones mixtas, para lo cual se debe primero convertirlas en fracciones racionales y luego si multiplicarlas. Es importante recordar que un número entero se pueden convertir en fracciones colocándole como denominador el número (1).

$$\left(y - \frac{5x}{2}\right) = \left(\frac{y}{1} - \frac{5x}{2}\right) = \frac{2y-5x}{2}$$

$$\left(2 + \frac{y-1}{x}\right) = \left(\frac{2}{1} + \frac{y-1}{x}\right) = \frac{2x+y-1}{x}$$

Como las dos fracciones son racionales, ahora si se pueden multiplicar.

$$\frac{(2y-5x)}{2} \bullet \frac{(2x+y\ \tilde{n}\ 1)}{x} = \frac{4xy+2y\hat{}-2y-10x\hat{}-5xy+5}{2x} = \frac{2y\hat{}-10x\hat{}-2y\ \tilde{n}xy+5}{2x}$$

2.11.4. DIVISION DE FRACCIONES:

Como en la división hay un dividendo y un divisor, la operación se realiza multiplicando el dividendo por el recíproco de divisor.

Ejemplo

Operar: $\left(\frac{6ab}{3z}\right) \sim \left(\frac{2xz}{2y}\right)$

El recíproco del divisor $\frac{2xz}{2y}$ es: $\frac{2y}{2xz}$

Entonces se multiplica el dividendo por este recíproco

$$\frac{6ab}{3z} \bullet \frac{2y}{2xz} = \frac{12aby}{6xz^3} = \boxed{\frac{2aby}{xz^2}}$$

Otra forma de realizar una división es:

$$\frac{\frac{6ab}{3z}}{\frac{2xz}{2y}} = \text{Producto de } \textbf{extremos} \text{ sobre producto de } \textbf{medios}$$

$$= \frac{6ab \bullet 2y}{3z^2 \bullet 2xz} = \frac{12aby}{6xz^3} = \boxed{\frac{2aby}{xz^2}}$$

2.12. FRACCIONES COMPLEJAS:

Las fracciones complejas son aquellas donde el numerador, denominador o los dos tiene fracciones algebraicas.

$\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{x}{y}}{2}$, $\dfrac{3+\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}-\frac{2}{a}}$ son algunos ejemplos de fracciones complejas.

Si se observa, se puede deducir que una fracción compleja no es más que la división indica de dos fracciones.
Las fracciones de este tipo, no se pueden operar de dicha forma, por lo cual se requiere un método de simplificarlas para poder realizar operaciones entre ellas.

Para SIMPLIFICAR fracciones complejas, se operan las fracciones del numerador y denominador por separado con los resultados de Estas, se hace la división.

Ejemplo:

Simplificar la fracción: $\dfrac{2-\frac{a}{x}}{x+\frac{1}{a}}$

Se operan independientemente el numerador y el denominador

Numerador: $2-\frac{a}{x} = \frac{2}{1}-\frac{a}{x} = \boxed{\frac{2x-a}{x}}$

Denominador: $x+\frac{1}{a} = \frac{x}{1}+\frac{1}{a} = \boxed{\frac{ax+1}{a}}$

La nueva fracción queda:

$$\frac{\frac{ax+1}{x}}{\frac{x+3}{x+1}} = \frac{a.(x+1)+1}{x.(x+3)} = \frac{ax+a+1}{x^2+3x}$$ Aplicando los productos de extremos

sobre productos de medios o la famosa **ley de la Oreja**

Ejemplo:

Simplificar: $$\frac{a+\frac{1}{x}}{2-\frac{x-1}{x+1}}$$

Se realizan las operaciones planteadas en el numerador y denominador en forma independiente:

Numerador $a+\frac{1}{x} = \frac{a}{1}-\frac{x}{1}+\frac{1}{x} = \boxed{\frac{ax+1}{x}}$

Denominador: $2-\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{1}-\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x+2-x+1}{x+1} = \boxed{\frac{x+3}{x+1}}$

La nueva fracción ser·:

$$\frac{\frac{ax+1}{x}}{\frac{x+3}{x+1}} = \frac{(x+1)(ax+1)}{x(x+3)} = \frac{ax^2+x+ax+1}{x^2+3x} =$$

$$\frac{ax^2-x^2-x^3+ax+x+1}{x^2+3x}$$

AUTOEVALUACION 9: FRACCIONES ALGEBRAICAS

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{15a^4b^3}{3a^5z^2}$

2. $\dfrac{17axt}{5bp}$

3. $\dfrac{20yz}{35zw}$

4. $\dfrac{5a^5t^3}{2t^6a^2b}$

6. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{x^2-x^2}}{x-1-\dfrac{3}{x-x^3}}$

7. $\dfrac{\dfrac{x-2}{x}-\dfrac{y+3}{y}}{4-\dfrac{3\sqrt{x}}{1-\dfrac{x-2}{2+\dfrac{2}{x}}}}$